

Tesis de Posgrado

Operadores tensoriales de concomitancia

Schifini, Claudio Gabriel

1984

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias
Matemáticas de la Universidad de Buenos Aires

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en digital.bl.fcen.uba.ar. Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in digital.bl.fcen.uba.ar. It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

Cita tipo APA:

Schifini, Claudio Gabriel. (1984). Operadores tensoriales de concomitancia. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires.
http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_1828_Schifini.pdf

Cita tipo Chicago:

Schifini, Claudio Gabriel. "Operadores tensoriales de concomitancia". Tesis de Doctor. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 1984.
http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_1828_Schifini.pdf

EXACTAS UBA

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales



UBA

Universidad de Buenos Aires

Tesis 1828

Ej. 2

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Tema de Tesis

OPERADORES TENSORIALES DE CONCOMITANCIA

Autor

LIC. CLAUDIO GABRIEL SCHIFINI

Director de Tesis

DR. RICARDO J. NORIEGA

Lugar de Trabajo

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

TESIS PRESENTADA PARA OPTAR AL TITULO DE DOCTOR EN CIENCIAS
MATEMATICAS

-1984-

1828
E 2
6

AGRADECIMIENTOS

- Al Dr. Ricardo J. Noriega, por su invalorable ayuda intelec
tual y espiritual.
- A mi mujer, por su constante e incondicional soporte.
- A mis hijos, por su inconsciente estímulo.
- A mis padres y hermanos.
- A la Sra. Silvia C. López, quien con gran dedicación y capa
cidad profesional realizó la mecanografía.
- Al Sr. Julio A. Corvalán.
- Al Departamento de Matemática que me brindó el lugar de
trabajo indispensable para la realización de esta tesis.
- A los amigos y compañeros que me ayudaron y alentaron
en estos años de trabajo.

ÍNDICE

- I - INTRODUCCION
- 1 - PRELIMINARES
- 2 - OPERADORES TENSORIALES DE CONCOMITANCIA
- 3 - OPERADORES ESCALARES DE CONCOMITANCIA: APLICACIONES
- 4 - TENSORES CONCOMITANTES DE UNA METRICA Y UN COVECTOR
- 5 - EXPRESIONES DE EULER- LAGRANGE Y ECUACIONES DE CAMPO
 - 5.I - EL TENSOR MOMENTO-ENERGIA Y LAS ECUACIONES DE EINSTEIN-MAXWELL.
 - 5.II- EL TENSOR MOMENTO-ENERGIA Y LA ECUACION DE KLEIN-GORDON.
- 6 - APENDICE I: K-JETS
- 7 - APENDICE II

INTRODUCCION

En el presente trabajo se han perseguido los siguientes dos objetivos: por un lado, encontrar una formulación adecuada de la clásica teoría de concomitantes introduciendo la noción de operador de concomitancia. Por otro lado, lograr nuevos resultados en esta teoría y usarlos para obtener aplicaciones a la física-matemática; más precisamente para, mediante el uso de principios variacionales, deducir ciertas ecuaciones de campo de la física teórica.

La noción intuitiva de los concomitantes tensoriales es sencilla de explicar en los casos elementales. Por ejemplo, si en una variedad diferenciable M^n tenemos un campo vectorial X y una 1-forma w , para cada carta local (x,U) de M será:

$$X = \sum_{i=1}^n a^i \frac{\partial}{\partial x^i} \quad \text{y} \quad w = \sum_{i=1}^n b_i dx^i, \quad \text{en } U$$

Podemos considerar entonces la función $L_U:U \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$L_U(p) = \sum_{i=1}^n a^i(p) b_i(p), \quad \forall p \in U$$

Es fácil de verificar que si (\tilde{x},\tilde{U}) es otra carta local en M con $U \cap \tilde{U} \neq \emptyset$ entonces $L_{U/U \cap \tilde{U}} = L_{\tilde{U}/U \cap \tilde{U}}$, con lo cual tenemos definido un "escalar" sobre M , es decir **una función** $L:M \rightarrow \mathbb{R}$ por $L|_U = L_U$. Decimos que este escalar es concomitante del campo X y de la 1-forma w si existe una función $F:\mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ (operador escalar de concomitancia) tal que para cada carta local (x,U) de M es:

$$L(p) = F(a^1(p), \dots, a^n(p), b_1(p), \dots, b_n(p)) \quad , \quad \forall p \in U$$

En este caso la función F está dada por:

$$F(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

y es importante notar que la función F está definida independientemente de las cartas Locales de la variedad.

Un ejemplo clásico de concomitante es la conexión de Levi-Civita de un espacio pseudo-Riemanniano. Si G es una pseudo-métrica sobre una variedad M , para cada carta local (x, U) de M será:

$$G = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} dx^i \otimes dx^j$$

Podemos formar entonces los símbolos de Christoffel $\Gamma_{jk}^i : U \rightarrow \mathbb{R}$ como:

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^n g^{is} (g_{js,k} + g_{ks,j} - g_{jk,s})$$

donde, por definición, $g_{js,k} = \partial g_{js} / \partial x^k$. Es sabido que las n^3 funciones Γ_{jk}^i así definidas son componentes de una conexión, la llamada conexión de Levi-Civita. Es claro que la forma en que Γ_{jk}^i depende de los g_{ij} y de sus derivadas parciales es la misma cualquiera sea la carta local de la variedad, así que nuevamente tenemos la noción de concomitante. La función F correspondiente es en este caso mucho más complicada de escribir pero se ve que sus "variables" son los coeficientes g_{ij} y sus derivadas parciales. Esta aparición de las derivadas parciales es lo que hace natural trabajar en la teoría de jets para obtener una formalización adecuada.

En la Sección 1 se recuerdan los conceptos elementales de la teoría de jets que serán necesarios en las subsiguientes secciones.

En la Sección 2 se definen los operadores tensoriales de concomitancia. La idea básica es que la noción de concomitante se reduce a la existencia de una cierta función $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que si se

reemplazan las variables de F por componentes de tensores de un tipo fijo y sus derivadas parciales, entonces lo que resulta son componentes tensoriales de un tipo fijo (Definición 2.6). A continuación se definen las identidades de invariancia [15] que resultan ser herramientas fundamentales para la determinación de los concomitantes.

En la Sección 3 se aplica la formalización indicada para obtener teoremas particulares sobre escalares concomitantes. Se obtienen en esta sección la forma general de: Los escalares concomitantes de un campo vectorial y una 1-forma (Teorema 3.3), los escalares concomitantes de un tensor pseudométrico y de un campo vectorial (Teorema 3.5), los escalares concomitantes de un tensor pseudométrico, de un escalar y de sus primeras derivadas (Teorema 3.7), los escalares concomitantes de un tensor pseudométrico y un tensor antisimétrico no singular (Teorema 3.9), y los escalares concomitantes de un tensor pseudométrico y una 1-forma (Teorema 3.11).

En la Sección 4, una vez asentada la formalización de la teoría, se recupera la notación clásica y se encuentran los tensores de tipo (r,s) para $r + s \leq 4$ concomitantes de un tensor pseudométrico y una 1-forma (Teoremas 4.2, 4.3, 4.4 y 4.5).

La Sección 5, última sección, está dedicada a la aplicación a la física-matemática de algunos de los resultados anteriores. Una de las aplicaciones, no incluida aquí ya que pertenece a otro autor [2], consiste, a partir del Teorema 4.5, en encontrar todos los Lagrangianos concomitantes de un tensor métrico, una 1-forma y sus derivadas parciales hasta cualquier orden, compatibles con las unidades físicas en cuestión (de longitud, de tiempo, de carga, etc.) [1]. Las aplicaciones incluidas son dos y en ambas se demuestra que la elección habitual del tensor momento-energía da lugar a las ecuaciones de Maxwell en la

teoría de Einstein-Maxwell (Teorema 5.2) y a la ecuación de Klein-Gordon en el correspondiente caso (Teorema 5.3).

Con la intención de que este trabajo sea autocontenido para una persona con nociones básicas de geometría diferencial, se desarrolla en la Sección 6 (Apéndice I) la teoría de k -jets bosquejada en la Sección 1.

Por último, se han relegado a la Sección 7 (Apéndice II) el análisis de ciertos aspectos de la teoría de k -jets en el caso particular en que el contexto sea el de la Sección 2, así como parte de la demostración del Lema 2.2 de esa sección.

1. PRELIMINARES

Sean M y P variedades diferenciables de dimensiones m y $m+n$ respectivamente, y sea $\pi: P \rightarrow M$ una submersión suryectiva (o sea, una aplicación C^∞ suryectiva tal que su diferencial $\pi_{*p}: P_p \rightarrow M_{\pi(p)}$ es epimorfismo $\forall p \in P$).

Una *sección local* de π es una aplicación $s: U \rightarrow P$, donde U es un abierto de M , tal que $\pi \circ s = \text{id}$. Notaremos con $\Gamma(U, P)$ al conjunto de todas las secciones locales C^∞ de π con dominio U .

Dado $k \in \mathbb{N}_0$, dos secciones locales C^∞ de π , $s_1 \in \Gamma(U_1, P)$ y $s_2 \in \Gamma(U_2, P)$, se dice que están (para $x_0 \in U_1 \cap U_2$) k, x_0 -relacionadas ($s_1 \sim_{k, x_0} s_2$) sii, en cartas locales, las derivadas parciales hasta el orden k de s_1 y s_2 coinciden en x_0 .

Se define $P^k(x)$ como el cociente, por esta relación de equivalencia, del conjunto de todas las secciones C^∞ de π con dominio algún entorno abierto de x , para cada $x \in M$; y P^k como la unión de todos los $P^k(x)$ para $x \in M$.

Se define la proyección $\pi^k: P^k \rightarrow M$ de la manera natural:
 $\pi^k(y) = x$ sii $y \in P^k(x)$.

Para $s \in \Gamma(U, P)$ se define el k -jet de s a la aplicación $j^k(s): U \rightarrow P^k$ dada por: $j^k(s)(x) = \bar{s}^{k, x} =$ clase de equivalencia de s por la relación $\sim_{k, x}$ definida antes.

Para k y $\ell \in \mathbb{N}_0$, con $k \geq \ell$, se define la *proyección canónica* de los k -jets sobre los ℓ -jets como la aplicación

$$\pi_\ell^k: P^k \rightarrow P^\ell \text{ dada por } \pi_\ell^k(j^k(s)(x)) = j^\ell(s)(x).$$

Es fácil ver que $P^0 \approx P$ y por lo tanto se identifican.

Una carta de coordenadas adaptada para P es una terna (U, φ_0, φ) , donde U es abierto de P y $\varphi_0: \pi(U) \rightarrow \mathbb{R}^m$ y $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ son difeomorfismos que conmutan el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \\ \pi \downarrow & & \downarrow P_1 \\ \pi(U) & \xrightarrow{\varphi_0} & \mathbb{R}^m \end{array}$$

donde P_1 es la proyección sobre el primer factor.

Para cada carta adaptada (U, φ_0, φ) , sean:

$$V_U = (\pi^k_0)^{-1}(U)$$

y

(1.1)

$$h = m + n + n \sum_{i=1}^k c'_{m,i}$$

donde $c'_{m,i}$ indica las combinaciones con repetición de m elementos tomados de a_i .

Si $y \in V_U$, entonces existe W entorno abierto de $\pi^k(y)$ en M y $s \in \Gamma(W, U)$ / $y = j^k(s)(\pi^k(y))$. Se definen entonces:

$$s^i = \varphi^i \circ s \circ \varphi_0^{-1} \quad (\forall 1 \leq i \leq n)$$

y

$$s^i_{\alpha_1 \dots \alpha_t} = D_{\alpha_1 \dots \alpha_t}(s^i), \quad (\forall 1 \leq t \leq k, 1 \leq \alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_t \leq m)$$

donde φ^i indica la coordenada $m+i$ de la función φ (notamos $\varphi = (\varphi^1, \dots, \varphi^m, \varphi^1, \dots, \varphi^n)$).

Definimos entonces:

$$\phi^k: V_U \rightarrow \mathbb{R}^h \text{ por:}$$

$$\phi^k(y) = (\varphi_0(x), s^1(\varphi_0(x)), \dots, s^i_{\alpha_1 \dots \alpha_k}(\varphi_0(x))),$$

donde $x = \pi^k(y)$.

La familia de todos los (V_U, ϕ^k) le dan a P^k una estructura de variedad diferenciable de dimensión h , dado por (1.1), con la cual $\{(V_U, \phi^k)\}$ resulta ser un atlas C^∞ para P^k .

2. OPERADORES TENSORIALES DE CONCOMITANCIA

2.1. Introducción

Sea M una variedad diferenciable de dimensión m y, para un número natural c y enteros no negativos $r_1, s_1, \dots, r_c, s_c$, sea:

$$P = \bigcup_{p \in M} (T_{s_1}^{r_1}(M_p) \times \dots \times T_{s_c}^{r_c}(M_p)) , \quad (2.1)$$

donde $T_s^r(M_p)$ es el producto tensorial de M_p (r veces) y M_p^* (s veces).

Sea:

$$\begin{aligned} \pi: P &\rightarrow M \text{ dada por:} \\ \pi(s_1, \dots, s_c) &= p \quad \text{sii} \quad s_j \in T_{s_j}^{r_j}(M_p), \quad \forall 1 \leq j \leq c \end{aligned}$$

Sea:

$$n = \sum_{j=1}^c m^{(r_j + s_j)} \quad (2.2)$$

Para cada carta local (x, U) de M consideramos el conjunto $\pi^{-1}(U)$. Luego:

$$\begin{aligned} s \in \pi^{-1}(U) &\Leftrightarrow \exists p \in U / s \in T_{s_1}^{r_1}(M_p) \times \dots \times T_{s_c}^{r_c}(M_p) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \exists p \in U / s = (s_1, \dots, s_c) \text{ con } s_j \in T_{s_j}^{r_j}(M_p), \quad \forall 1 \leq j \leq c. \end{aligned}$$

Por lo tanto, para $1 \leq j \leq c$, será:

$$s_j = a_{(j)h_1 \dots h_{s_j}}^{i_1 \dots i_{r_j}} \left[\frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \right]_p \otimes \dots \otimes \left[\frac{\partial}{\partial x^{i_{r_j}}} \right]_p \otimes (dx^{h_1})_p \otimes \dots \otimes (dx^{h_{s_j}})_p$$

Definimos entonces:

$$\begin{aligned} t_U: \pi^{-1}(U) &\rightarrow x(U) \times \mathbb{R}^n \text{ por} \\ t_U(s) &= (x(p), a_{(1)h_1 \dots h_{s_1}}^{i_1 \dots i_{r_1}}, \dots, a_{(c)h_1 \dots h_{s_c}}^{i_1 \dots i_{r_c}}) \end{aligned}$$

Como en el caso del fibrado tangente, TM , es fácil ver que las aplicaciones t_U determinan sobre P una estructura de variedad diferenciable de dimensión $m+n$, donde n está dado por (2.2), con la cual la familia $\{(t_U, \pi^{-1}(U))\}$ resulta un atlas C^∞ de P . Es fácil ver

también que, con esta estructura diferenciable, π resulta una submersión suryectiva. Por lo tanto (Ver Sección 1) podemos considerar, para cada $k \in \mathbb{N}_0$, el espacio de los k -jets, P^k , correspondiente a la variedad P definida en (2.1).

Si $\alpha = \{(x, U)\}$ es un atlas C^∞ de M con $x(U) = \mathbb{R}^m$, se obtiene a partir de α un atlas C^∞ $\alpha' = \{(t_U, \pi^{-1}(U))\}$ de P con la propiedad de que $t_U(\pi^{-1}(U)) = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$. Luego el atlas α nos proporciona una familia de cartas adaptadas para P , $\{(\pi^{-1}(U), t_U, x)\}$ cuyos dominios cubren P . De aquí, usando los resultados de la Sección 6, obtenemos, para cada k entero no negativo, un atlas C^∞ $\alpha^k = \{(\phi^k, V_{\pi^{-1}(U)}^k)\}$ de P^k tal que $\phi^k(V_{\pi^{-1}(U)}^k) = \mathbb{R}^h$, donde $V_{\pi^{-1}(U)}^k$ y $h (= \dim P^k)$ están dados por (1.1) y n está dado por (2.2).

Consideremos ahora un elemento p de M fijo y una carta local (x, U) de M alrededor de p tal que $x(U) = \mathbb{R}^m$. Sea $k \in \mathbb{N}_0$.

Para cada carta (\tilde{x}, U) de M con $\tilde{x}(U) = \mathbb{R}^m$ definimos:

$\psi_p^k(\tilde{x}) : \mathbb{R}^{h-m} \rightarrow \mathbb{R}^h$ la aplicación (C^∞) dada por:

$$\psi_p^k(\tilde{x}) (b^i, b_\alpha^i, \dots, b_{\alpha_1 \dots \alpha_k}^i) = \phi^k \circ (\phi^k)^{-1}(x(p), b^i, b_\alpha^i, \dots, b_{\alpha_1 \dots \alpha_k}^i),$$

donde $1 \leq i \leq n$ (n el dado en (2.2)) y $1 \leq \alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_k \leq m$, $1 \leq k \leq k$.

Sea A el conjunto de todas las funciones $\psi_p^k(\tilde{x})$ para cartas locales de $M(\tilde{x}, U)$ con $\tilde{x}(U) = \mathbb{R}^m$.

2.2. Lema

A es biyectivo a $GL(m, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^q$.

donde $GL(m, \mathbb{R})$ indica el conjunto de matrices inversibles de $\mathbb{R}^{m \times m}$ y $q = \dim(M \times M)^{k+1} - 2m - m^2$ (donde $(M \times M)^{k+1}$ es el espacio de los $(k+1)$ -jets correspondiente a la variedad $M \times M$ con la proyección natural sobre el primer factor).

Dem.:

Sea:

$$f:A \rightarrow GL(m,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^q$$

dada por:

$$f(\psi_p^k(\tilde{x})) = (B_j^i(p), B_{j_1 j_2}^i(p), \dots, B_{j_1 \dots j_{k+1}}^i(p)), \quad (2.3)$$

donde

$$B_{j_1 \dots j_s}^i = \frac{\partial^s x^i}{\partial \tilde{x}^{j_1} \dots \partial \tilde{x}^{j_s}}$$

$$\forall 1 \leq j_1 \leq j_2 \leq \dots \leq j_s \leq m, \forall 1 \leq s \leq k+1.$$

No es claro, en principio, que f esté bien definida. Sin embargo esto es verdadero y su demostración, por lo engorroso de su notación ha sido relegada al Apéndice II- Sección 7.

Por el contrario, como $x \circ \tilde{x}^{-1}$ es una aplicación inversible, es claro que $B_j^i(p) \in GL(m,\mathbb{R})$ y por lo tanto, efectivamente, $f(A) \subset GL(m,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^q$.

Para probar el lema definimos:

$$g: GL(m,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^q \rightarrow A$$

de la siguiente manera:

Dado $(C_j^i, C_{j_1 j_2}^i, \dots, C_{j_1 \dots j_{k+1}}^i) \in GL(m,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^q$, sea (\tilde{x}, U) una carta de M con $\tilde{x}(U) = \mathbb{R}^m$ tal que:

$$\begin{cases} \tilde{x}(p) = x(p) \\ B_j^i(p) = C_j^i \\ B_{j_1 \dots j_t}^i(p) = C_{j_1 \dots j_t}^i \end{cases} \quad \forall 2 \leq t \leq k+1$$

Es claro que una tal carta siempre existe (bastaría,

por ejemplo, componer x con el polinomio de grado $\leq k+1$ cuyos coeficientes son los $C_{j_1 \dots j_t}^i$.

Definimos entonces:

$$g(C_j^i, C_{j_1 j_2}^i, \dots, C_{j_1 \dots j_{k+1}}^i) = \psi_p^k(\tilde{x}) \quad (2.4)$$

Como antes, y por la misma razón, también relegamos la demostración de la buena definición de g al Apéndice II- Sección 7.

De la definición de g se desprenden automáticamente las igualdades:

$$g \circ f = \text{id}, \quad f \circ g = \text{id},$$

de donde $g = f^{-1}$ y por lo tanto f es biyectiva. ///.

2.3. Definiciones

En particular podemos considerar $M = \mathbb{R}^m$, para algún m natural, $p=0$ y $(x, U) = (\text{id}, \mathbb{R}^m)$, la carta usual de \mathbb{R}^m .

Cada elemento de A , definido en 2.1, es una aplicación (diferenciable) de \mathbb{R}^{h-m} en \mathbb{R}^h . El lema 2.2 nos permite, por lo tanto, definir una acción para cada $k \in \mathbb{N}_0$. Sea:

$$H^k: GL(m, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^{h-m} \rightarrow \mathbb{R}^{h-m} \text{ dada por:} \\ H^k(B, b) = \pi'(f^{-1}(B)(b)), \quad (2.5)$$

$\forall B \in GL(m, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^q, \forall b \in \mathbb{R}^{h-m}$; donde f^{-1} es la aplicación dada en (2.4) y $\pi': \mathbb{R}^h \rightarrow \mathbb{R}^{h-m}$ es la proyección sobre las últimas $h-m$ coordenadas de \mathbb{R}^h .

Diremos que un abierto V de \mathbb{R}^{h-m} es *invariante* por H^k sii

$$H^k(GL(m, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^q \times V) \subset V$$

2.4. Observaciones

La acción H^k definida por (2.5) será de fundamental importancia en nuestra futura definición de operador tensorial de concomitancia. Por esta razón es necesario el perfecto entendimiento de su comportamiento. En las siguientes líneas es nuestra meta lograr ese cometido.

Cada elemento $C \in GL(m, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^q$ es de la forma:

$$C = (C_{j_1 \dots j_s}^i, C_{j_1 j_2}^i, \dots, C_{j_1 \dots j_{k+1}}^i),$$

donde, por supuesto, $1 \leq i, j \leq m$ y $1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_s \leq m$ para todo $1 \leq s \leq k+1$.

Dado C vimos en 2.2 que existe una carta $(\tilde{x}, \mathbb{R}^m)$ tal que:

$$(1) \quad B_{j_1 \dots j_s}^i(0) = C_{j_1 \dots j_s}^i, \quad \forall 1 \leq s \leq k+1$$

donde $B_{j_1 \dots j_s}^i = \partial^s x^i / \partial \tilde{x}^{j_1} \dots \partial \tilde{x}^{j_s}$. Quedan definidos por lo tanto:

$$A_{j_1 \dots j_s}^i = \frac{\partial^s \tilde{x}^i}{\partial x^{j_1} \dots \partial x^{j_s}}$$

Definimos entonces un elemento $D = (D_j^i, D_{j_1 j_2}^i, \dots, D_{j_1 \dots j_{k+1}}^i)$

de $GL(m, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^q$ por:

$$(2) \quad D_{j_1 \dots j_s}^i = A_{j_1 \dots j_s}^i(0), \quad \forall 1 \leq s \leq k+1$$

Es fácil ver de aquí que:

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} D_j^i = ((C_s^r)^{-1})_j^i \\ D_{j_1 j_2}^i = -D_j^i D_{j_1}^{\ell_1} D_{j_2}^{\ell_2} C_{\ell_1 \ell_2}^j \\ D_{j_1 j_2 j_3}^i = -\{ [D_{j j_3}^i D_{j_1}^{\ell_1} D_{j_2}^{\ell_2} + D_j^i D_{j_1 j_3}^{\ell_1} D_{j_2}^{\ell_2} + D_j^i D_{j_1}^{\ell_1} D_{j_2 j_3}^{\ell_2}] C_{\ell_1 \ell_2}^j \\ \quad + D_j^i D_{j_1}^{\ell_1} D_{j_2}^{\ell_2} D_{j_3}^{\ell_3} C_{\ell_1 \ell_2 \ell_3}^j \} \\ \vdots \end{array} \right.$$

donde en general, inductivamente, los siguientes $D_{j_1 \dots j_s}^i$ se obtienen de la igualdad:

$$D_{j_1 \dots j_s}^i = A_{j_1 \dots j_s}^i(0) = \frac{\partial}{\partial x_{j_s}} (A_{j_1 \dots j_{s-1}}^i)(0)$$

reemplazando luego por las igualdades (1) y (2).

Ahora bien, cada elemento $b \in \mathbb{R}^{h-m}$ puede ser pensado en la forma:

$$b = (b_{(\ell)j_1 \dots j_{s_\ell}}^{i_1 \dots i_{r_\ell}}, b_{(\ell)j_1 \dots j_{s_\ell}}^{i_1 \dots i_{r_\ell} \alpha}, \dots, b_{(\ell)j_1 \dots j_{s_\ell}}^{i_1 \dots i_{r_\ell} \alpha_1 \dots \alpha_k})$$

Luego será:

$$H^k(C, b) = \pi' (f^{-1}(C)(b)) = \pi' (\psi_O^k(\tilde{x})(b)) = \pi' ((\hat{\phi}^k \circ (\phi^k)^{-1})(0, b)). \quad (2.5)$$

Teniendo en cuenta el Apéndice II-Sección 7 y las igualdades

(3) resulta que:

$$H^k(C, b) = (b_{(\ell)t_1 \dots t_{s_\ell}}^{\tilde{h}_1 \dots \tilde{h}_{r_\ell}}, b_{(\ell)t_1 \dots t_{s_\ell} \beta}^{\tilde{h}_1 \dots \tilde{h}_{r_\ell}}, \dots, b_{(\ell)t_1 \dots t_{s_\ell} \beta_1 \dots \beta_k}^{\tilde{h}_1 \dots \tilde{h}_{r_\ell}})$$

donde:

$$b_{(\ell)t_1 \dots t_{s_\ell}}^{\tilde{h}_1 \dots \tilde{h}_{r_\ell}} = D_{i_1}^{h_1} \dots D_{i_{r_\ell}}^{h_{r_\ell}} C_{t_1}^{j_1} \dots C_{t_{s_\ell}}^{j_{s_\ell}} b_{(\ell)j_1 \dots j_{s_\ell}}^{i_1 \dots i_{r_\ell}}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{b}_{(l)t_1 \dots t_{s_\ell} \beta}^{h_1 \dots h_{r_\ell}} &= \{ [D_{i_1 j}^{h_1} D_{i_2}^{h_2} \dots D_{i_{r_\ell} j}^{h_{r_\ell}} + \dots + D_{i_1 j}^{h_1} \dots D_{i_{r_\ell} j}^{h_{r_\ell}}] C_{t_1}^{j_1} \dots C_{t_{s_\ell}}^{j_{s_\ell}} C_\beta^{j_{s_\ell+1}} + \\
&+ [C_{t_1 \beta}^{j_1} C_{t_2}^{j_2} \dots C_{t_{s_\ell}}^{j_{s_\ell}} + \dots + C_{t_1}^{j_1} \dots C_{t_{s_\ell} \beta}^{j_{s_\ell}}] D_{i_1}^{h_1} \dots D_{i_{r_\ell}}^{h_{r_\ell}} \} b_{(l)j_1 \dots j_{s_\ell}}^{i_1 \dots i_{r_\ell}} + \\
&+ D_{i_1}^{h_1} \dots D_{i_{r_\ell}}^{h_{r_\ell}} C_{t_1}^{j_1} \dots C_{t_{s_\ell}}^{j_{s_\ell}} C_\beta^\alpha b_{(l)j_1 \dots j_{s_\ell} \alpha}^{i_1 \dots i_{r_\ell}}
\end{aligned}$$

y en general las expresiones de las siguientes componentes se consiguen considerando para cada ℓ a $b_{(l)j_1 \dots j_{s_\ell}}^{i_1 \dots i_{r_\ell}}$ como las coordenadas, en el punto 0, de un tensor de tipo (r_ℓ, s_ℓ) en la carta (id, \mathbb{R}^m) y calculando formalmente los cambios de coordenadas a la carta $(\tilde{x}, \mathbb{R}^m)$ del tensor y sus derivadas hasta el orden k , y reemplazando luego por las igualdades (1) y (2).

Es claro entonces que H^k resulta ser una función diferenciable.

Estamos ahora en condiciones de dar nuestra definición de operador tensorial de concomitancia. Damos primero una definición auxiliar.

2.5. Definición

Sean $m, r, s, w, k \in \mathbb{N}_0$ y sea V un abierto de \mathbb{R}^{h-m} (h el dado por (1.1)).

Dada $F: V \subset \mathbb{R}^{h-m} \rightarrow \mathbb{R}^{m(r+s)}$ se define la aplicación asociada a F a la función:

$$A(F): GL(m, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^q \times V \rightarrow \mathbb{R}^{m(r+s)} \quad \text{dada por:}$$

$$A(F)_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} (B, b) = J^w B_{h_1}^{i_1} \dots B_{h_r}^{i_r} A_{j_1}^{\ell_1} \dots A_{j_s}^{\ell_s} F_{\ell_1 \dots \ell_s}^{h_1 \dots h_r} (b) \quad (2.6)$$

donde q está definido en 2.2, $B = (B_{j_1 j_2}^i, \dots, B_{j_1 \dots j_{k+1}}^i) \in GL(m, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^q$, $A_j^i = ((B_\ell^t)^{-1})_j^i$ y $J = \det(B_\ell^t)$.

2.6. Definición

Sea c un número natural y sean $m, r, s, w, k, r_1, s_1, \dots, r_c, s_c$ enteros no negativos.

Un k -operador tensorial de $(r_1, s_1; \dots; r_c, s_c)$ -concomitancia de tipo (r, s) y peso w es una función diferenciable

$$F: V \subset \mathbb{R}^{h-m} \rightarrow \mathbb{R}^{m(r+s)}$$

definida sobre un abierto V de \mathbb{R}^{h-m} (h dado por (1.1)) invariante por la acción H^k tal que:

$$F_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} \circ H^k(B, b) = A(F)_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}(B, b) \quad (2.7)$$

donde H^k está dada por (2.5) y $A(F)$ por (2.6).

2.7. Definición

Si $F: V \subset \mathbb{R}^{h-m} \rightarrow \mathbb{R}^{m(r+s)}$ es un k -operador tensorial de $(r_1, s_1; \dots; r_c, s_c)$ -concomitancia de tipo (r, s) y peso w , entonces de (2.7) se sigue que:

$$X(F_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} \circ H^k) = X(A(F)_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}) \quad (2.8)$$

para todo X vector tangente a $(GL(m, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^q) \subset (GL(m, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^{h-m})$

Las identidades (2.8) reciben el nombre de *identidades de invariancia para F* .

2.8. Definición

Estamos ahora en condiciones de definir la noción clásica de "tensores concomitantes de ciertos tensores".

Aunque las definiciones deben darse en cada caso particular, es posible dar una definición general de este hecho con ciertas impresiones.

Si L es una densidad tensorial $\overset{\infty}{C}$ de tipo (r,s) y peso w sobre una variedad diferenciable M m -dimensional y $T_{s_j}^{r_j} \in D_{s_j}^{r_j}(M)$ (campos tensoriales $\overset{\infty}{C}$ de tipo (r_j, s_j)) para $1 \leq j \leq c$, decimos entonces que:

L es *concomitante* de los tensores $T_{s_j}^{r_j}$ y sus derivadas hasta el orden k sii existe un k -operador tensorial de $(r_1, s_1; \dots; r_c, s_c)$ -concomitancia de tipo (r,s) y peso w

$$F: V \subset \mathbb{R}^{h-m} \rightarrow \mathbb{R}^m^{(r+s)} \text{ tal que:}$$

- i) V es un abierto invariante (que depende de los tensores dados $T_{s_j}^{r_j}$).
- ii) F satisface ciertas propiedades (que dependen de los tensores dados $T_{s_j}^{r_j}$).
- iii) Para cada carta local (x, U) de M

$$L_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}(p) = F_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}(a_{(l)j_1 \dots j_{s_l}}^{i_1 \dots i_{r_l}}(p); a_{(l)j_1 \dots j_{s_l}}^{i_1 \dots i_{r_l}}(p), \dots, a_{(l)j_1 \dots j_{s_l}}^{i_1 \dots i_{r_l}}(p)), \quad \forall p \in U$$

donde (l) significa colocar todas las variables para $1 \leq l \leq c$, $a_{(l)j_1 \dots j_{s_l}}^{i_1 \dots i_{r_l}}$ indican las coordenadas de $T_{s_l}^{r_l}$ en esa carta y la coma indica derivada parcial usual.

Es claro que las imprecisiones de esta definición radican en la determinación del abierto invariante $V(i))$ y en las propiedades que debe satisfacer el operador F (ii)). Por el contrario, la condición iii) es bien precisa y es, en definitiva, la condición fundamental que debe cumplir el operador F para que L sea concomitante; por lo tanto dicha condición será una constante en todas las definiciones particulares. Como ejemplo definimos.

2.9. Ejemplo

Sea L una densidad tensorial de tipo (r,s) y peso w , y sean $G \in D_2^0(M)$ un tensor simétrico no-singular y $\psi \in D_1(M)$ una 1-forma.

Decimos que L es concomitante de G hasta el orden k_1 y de ψ hasta el orden k_2 , o sea:

$$L = L(g_{ij}; g_{ij, h_1} ; \dots ; g_{ij, h_1 \dots h_{k_1}} ; \psi_i ; \psi_{i, h_1} ; \dots ; \psi_{i, h_1 \dots h_{k_2}}),$$

sii existe un k -operador tensorial de $(0,2;0,1)$ -concomitancia ($k = \max(k_1, k_2)$) de tipo (r,s) y peso w $F: V \subset \mathbb{R}^{h-m} \rightarrow \mathbb{R}^{m(r+s)}$ tal que:

$$i) \quad V = GL(m, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^m,$$

$$ii) \quad F_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} / GL(m, \mathbb{R}) \times \{b\} \text{ es simétrica } \forall b \in \mathbb{R}^m, \text{ o sea:}$$

$$F_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}(a, b) = F_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}(a^t, b), \text{ donde } a^t \text{ signifi-}$$

ca transpuesta de a .

$$iii) \quad \text{si } k=k_1 \quad \frac{\partial F_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}}{\partial x_{h\alpha_1 \dots \alpha_t}} = 0, \quad \forall k_2 < t \leq k$$

$$\text{si } k=k_2 \quad \frac{\partial^F \frac{i_1 \dots i_r}{j_1 \dots j_s}}{\partial x_{h_1 h_2 \alpha_1 \dots \alpha_t}} = 0, \quad \forall k_1 < t \leq k$$

iv) Para cada carta local (x, U) de M

$$L \frac{i_1 \dots i_r}{j_1 \dots j_s}(p) = F \frac{i_1 \dots i_r}{j_1 \dots j_s} (g_{ij}(p); \psi_i(p); g_{ij, \alpha}(p); \psi_{i, \alpha}(p); \dots;$$

$$g_{ij, \alpha_1 \dots \alpha_k}(p); \psi_{i, \alpha_1 \dots \alpha_k}(p)), \quad \forall p \in U$$

donde $G = g_{ij} dx^i \otimes dx^j$ y $\psi = \psi_i dx^i$ en esa carta y donde la coma indica derivada parcial usual.

3. OPERADORES ESCALARES DE CONCOMITANCIA: APLICACIONES

En la presente Sección mostraremos como los conceptos desarrollados en la Sección 2 pueden ser usados para demostrar algunos nuevos resultados de la teoría de los escalares concomitantes. Los argumentos aquí usados se basan fundamentalmente en el exacto conocimiento del dominio de definición de cada concomitante. Esto en general no ocurre con el tratamiento clásico en donde los espacios en los cuales se trabaja no están definidos con precisión, lo que hace que ciertos argumentos de la teoría de variedades puedan no entenderse con claridad. Por este motivo, y para reforzar nuestro concepto, hemos incluido también redemostraciones de ciertos resultados ya conocidos de la teoría.

Trataremos aquí con operadores tensoriales de concomitancia de tipo $(0,0)$ y peso 0, que es considerar $r=s=w=0$ en la definición 2.6 de la Sección 2. Por su importancia damos entonces la siguiente definición particular:

3.1. Definición

Un k -operador *escalar* de $(r_1, s_1; \dots; r_c, s_c)$ -concomitancia es una función diferenciable $F: V \subset \mathbb{R}^{h-m} \rightarrow \mathbb{R}$ definida sobre un abierto invariante V tal que:

$$F \circ H^k(B, b) = F(b) \quad (3.1)$$

3.2. Definición

Sea $L: M \rightarrow \mathbb{R}$ un escalar definido sobre una variedad diferenciable m -dimensional M y sean $\psi \in D_1(M)$ y $\varphi \in D^1(M)$ una 1-forma

y un campo vectorial respectivamente tales que $\psi(\varphi)$ es nunca nulo.

Diremos que L es concomitante de ψ y φ , o sea $L = L(\psi_i; \varphi^i)$, sii existe un 0-operador escalar de $(0,1;1,0)$ -concomitancia $F: \mathbb{R}_{\neq 0}^{2m} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que, para cada carta local (x,U) de M :

$$L(p) = F(\psi_i(p), \varphi^i(p)), \quad \forall p \in U \quad (3.2)$$

donde $\psi = \psi_i dx^i$ y $\varphi = \varphi^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ en esa carta.

3.3. Teorema

Si L es un escalar concomitante de una 1-forma ψ y un campo vectorial φ , tales que $\psi(\varphi)$ es nunca nulo, existe entonces una función $f: \mathbb{R}_{\neq 0} \rightarrow \mathbb{R} \quad C^\infty$ tal que:

$$L = f \circ \psi(\varphi) \quad (3.3)$$

Dem:

Por la definición 3.2 existe un 0-operador escalar de $(0,1;1,0)$ -concomitancia $F: \mathbb{R}_{\neq 0}^{2m} \rightarrow \mathbb{R}$ verificando (3.2).

Como $k=0$ es $\dim(M \times M)^1 = 2m - m^2$. Tenemos entonces, por (1.1) y (2.2), que:

$$n=2m, \quad h=3m, \quad h-m=2m \quad \text{y} \quad q=0.$$

De aquí, la acción $H(=H^0)$ definida por (2.5) es, como puede observarse de 2.4, la aplicación:

$$H: GL(m, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}_{\neq 0}^{2m} \rightarrow \mathbb{R}_{\neq 0}^{2m} \quad \text{dada por:}$$

$$H(B, a, b) = (B_j^i a_i, (B^{-1})_j^i b^j) \quad (3.4)$$

$$\forall B \in GL(m, \mathbb{R}), \quad \forall (a, b) \in \mathbb{R}_{\neq 0}^{2m}.$$

Se sigue de 2.7 que F debe satisfacer las identidades de invariancia (2.8) correspondientes. Notamos:

$$(B_j^i, x_i, y^j)$$

las coordenadas de $GL(m, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}_{\neq 0}^{2m}$. Deben satisfacerse entonces las ecuaciones:

$$\left(\frac{\partial}{\partial B_t^s} \right) (F \circ H) = 0 \quad (3.5)$$

$\forall 1 \leq s, t \leq m$ y $\forall (C, a, b) \in GL(m, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}_{\neq 0}^{2m}$. Pero:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial (F \circ H)}{\partial B_t^s} \right) (C, a, b) &= \sum_{i=1}^{2m} (D_i F) (H(C, a, b)) \left(\frac{\partial H^i}{\partial B_t^s} \right) (C, a, b) = \\ &= \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} \right) (H(C, a, b)) \left(\frac{\partial H^i}{\partial B_t^s} \right) (C, a, b) + \\ &+ \sum_{i=m+1}^{2m} \left(\frac{\partial F}{\partial y^{(i-m)}} \right) (H(C, a, b)) \left(\frac{\partial H^i}{\partial B_t^s} \right) (C, a, b) \end{aligned}$$

Si notamos:

$$F^i = \frac{\partial F}{\partial x_i} \text{ y } F_i = \frac{\partial F}{\partial y^i}, \quad \forall 1 \leq i \leq m$$

la igualdad anterior puede escribirse en la forma:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial (F \circ H)}{\partial B_t^s} \right) (C, a, b) &= \sum_{i=1}^m F^i (H(C, a, b)) \left(\frac{\partial H^i}{\partial B_t^s} \right) (C, a, b) + \\ &+ \sum_{i=m+1}^{2m} F_{i-m} (H(C, a, b)) \left(\frac{\partial H^i}{\partial B_t^s} \right) (C, a, b) \end{aligned} \quad (3.6)$$

Por otra parte, de (3.4):

Si $1 \leq i \leq m$ es $H^i(D, u, v) = D_i^j u_j$, luego:

$$\left(\frac{\partial H^i}{\partial B_t^s} \right) (C, a, b) = a_s \delta_i^t \quad (3.7)$$

y si $m+1 \leq i \leq 2m$ es $H^i(D, u, v) = (D^{-1})_j^{i-m} v^j$, de donde, teniendo en cuenta que $\partial (B^{-1})_j^k / \partial B_t^s = - (B^{-1})_j^t (B^{-1})_s^k$, resulta que:

$$\left(\frac{\partial H^i}{\partial B_t^s} \right) (C, a, b) = -b^j (C^{-1})_j^t (C^{-1})_s^{i-m} \quad (3.8)$$

Reemplazando (3.7) y (3.8) en (3.6) resulta que:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial (F \circ H)}{\partial B_t^s} \right) (C, a, b) &= \sum_{i=1}^m F^i(H(C, a, b)) a_s \delta_i^t - \\ &- \sum_{i=m+1}^{2m} F_{i-m}(H(C, a, b)) b^j (C^{-1})_j^t (C^{-1})_s^{i-m}. \end{aligned}$$

En particular podemos tomar $C=I$ (matriz identidad), luego $H(I, a, b) = (a, b)$. Usando (3.5) tenemos que:

$$F^i(a, b) a_j = F_j(a, b) b^i$$

$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^{2m}$, $\forall 1 \leq i, j \leq m$, o sea:

$$F^i x_j = F_j y^i, \quad \forall 1 \leq i, j \leq m \quad (3.9)$$

Sea:

$$\begin{aligned} A &= \{(a, b) \in \mathbb{R}_{\neq 0}^{2m} : \exists 1 \leq i \leq m \text{ con } a_i = 0\} \cup \\ &\cup \{(a, b) \in \mathbb{R}_{\neq 0}^{2m} : \exists 1 \leq j \leq m \text{ con } b^j = 0\}. \end{aligned}$$

Luego en $\mathbb{R}_{\neq 0}^{2m} - A$ será por (3.9):

Luego $\forall (a,b) \in \mathbb{R}_{\neq 0}^{2m}$ tal que $a_i b^i \neq 0$ es:

$$F(a,b) = f((x_i y^i)(a,b)) \quad (3.11)$$

Ahora bien, dado $p \in M$, sea (x,U) una carta de M alrededor de p . Luego $\psi = \psi_i dx^i$ y $\varphi = \varphi^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)$ en esa carta. Como $\psi(\varphi)$ es nunca nulo resulta $\psi_i \varphi^i$ nunca nulo, y por lo tanto de (3.2) y (3.11) resulta que:

$$\begin{aligned} L(p) &= F(\psi_i(p), \varphi^i(p)) = f(\psi_i(p) \varphi^i(p)) = \\ &= (f \circ \psi(\varphi))(p) \end{aligned}$$

Q.E.D.

3.4. Definición

Sea $L:M \rightarrow \mathbb{R}$ un escalar definido sobre una variedad diferencial m -dimensional M . Sea $G \in D_2^0(M)$ un tensor 2-covariante, simétrico y no-singular, y sea $\varphi \in D^1(M)$ un campo vectorial, tales que $G(\varphi, \varphi)$ sea nunca nulo.

Diremos que L es concomitante de G y φ , o sea $L = L(g_{ij}; \varphi^i)$, sii existe un 0-operador escalar de $(0,2;1,0)$ -concomitancia $F:GL(m, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}_{\neq 0}^m \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

i) $F/GL(m, \mathbb{R}) \times \{b\}$ es simétrico $\forall b \in \mathbb{R}_{\neq 0}^m$, o sea:

$$F(a,b) = F(a^t, b) \quad (3.12)$$

$\forall a \in GL(m, \mathbb{R}), \forall b \in \mathbb{R}_{\neq 0}^m$, donde a^t significa transpuesta de a .

ii) Para cada carta local (x,U) de M :

$$L(p) = F(g_{ij}(p), \varphi^i(p)), \forall p \in U \quad (3.13)$$

donde $G = g_{ij} dx^i \otimes dx^j$ y $\varphi = \varphi^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ en esa carta.

3.5. Teorema

Si L es un escalar concomitante de un tensor 2-covariante, simétrico y no-singular G y de un campo vectorial φ , tales que $G(\varphi, \varphi)$ es nunca nulo, existe entonces una función $f: \mathbb{R}_{\neq 0}^m \rightarrow \mathbb{R}$ C^∞ tal que:

$$L = f \circ G(\varphi, \varphi) \quad (3.14)$$

Dem:

Por la definición 3.4 existe un 0-operador escalar de $(0, 2; 1, 0)$ -concomitancia $F: GL(m, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}_{\neq 0}^m \rightarrow \mathbb{R}$ verificando (3.12) y (3.13).

Como $k=0$ es (como en el teorema 3.3) $q=0$. Calculando (1.1) y (2.2) en este caso resulta que:

$$n = m^2 + m, \quad h = m + m^2 + m, \quad h-m = m^2 + m.$$

De aquí, la acción $H(=H^0)$ definida por (2.5) es la aplicación:

$$H: GL(m, \mathbb{R}) \times GL(m, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}_{\neq 0}^m \rightarrow GL(m, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}_{\neq 0}^m$$

dada por:

$$H(B, a, b) = (B_i^r B_j^l a_{rl}, (B^{-1})_j^i b^j) \quad (3.15)$$

Notamos:

$$(B_j^i, x_{ij}, y^i)$$

las coordenadas de $GL(m, \mathbb{R}) \times GL(m, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}_{\neq 0}^m$.

Luego F debe satisfacer las identidades de invariancia (2.8).

Estas son:

$$\left(\frac{\partial}{\partial B_t^s} \right) (F \circ H) = 0 \quad (3.16)$$

$\forall 1 \leq s, t \leq m, \forall (C, a, b) \in GL(m, \mathbb{R}) \times GL(m, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}_{\neq 0}^m$. Si notamos:

$$F^{ij} = \frac{\partial F}{\partial x_{ij}}, \quad y \quad F_i = \frac{\partial F}{\partial y^i}, \quad \forall 1 \leq i, j \leq m$$

tenemos que:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial B_t^s} \right) (F \circ H) &= \sum_{i,j=1}^m F^{ij}(H(C, a, b)) \left(\frac{\partial H^{ij}}{\partial B_t^s} \right) (C, a, b) + \\ &+ \sum_{i=1}^m F_i(H(C, a, b)) \left(\frac{\partial H^i}{\partial B_t^s} \right) (C, a, b) \end{aligned}$$

En particular si $C=I$ (matriz identidad) será por (3.15):

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial (F \circ H)}{\partial B_t^s} \right) (I, a, b) &= \sum_{i,j=1}^m F^{ij}(a, b) \frac{\partial H^{ij}}{\partial B_t^s} / (I, a, b) + \\ &+ \sum_{i=1}^m F_i(a, b) \frac{\partial H^i}{\partial B_t^s} / (I, a, b) \end{aligned} \quad (3.17)$$

Es fácil verificar que:

$$\frac{\partial H^{ij}}{\partial B_t^s} / (I, a, b) = \delta_i^t a_{sj} + \delta_j^t a_{is} \quad (3.18)$$

y

$$\frac{\partial H^i}{\partial B_t^s} / (I, a, b) = -b^t \delta_s^i$$

Luego reemplazando (3.18) en (3.17) se obtiene por (3.16) que:

$$F^{tj}(a,b) a_{sj} + F^{jt}(a,b) a_{js} = F_s(a,b) b^t$$

Pero (3,12) nos dice que:

$$F^{tj} = F^{jt} \quad (3.19)$$

por lo tanto será:

$$F^{tj}(a,b) (a_{sj} + a_{js}) = F_s(a,b) b^t$$

Si en particular consideramos $a \in \text{SGL}(m, \mathbb{R})$, donde con $\text{SGL}(m, \mathbb{R})$ indicamos el conjunto de matrices simétricas e inversibles, resulta que:

$$2F^{tj}(a,b) a_{sj} = F_s(a,b) b^t$$

o sea:

$$F^{tj} x_{sj} = \frac{1}{2} F_s y^t, \text{ en } \text{SGL}(m, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}_{\neq 0}^m \quad (3.20)$$

O también:

$$F^{tj} = \frac{1}{2} F_s y^t x^{sj}, \text{ en } \text{SGL}(m, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}_{\neq 0}^m \quad (3.21)$$

donde $x^{sj}(a) = (a^{-1})_{sj}$. Usando (3.19) y el hecho que restringiéndonos a $\text{SGL}(m, \mathbb{R})$ es $x_{ij} = x_{ji}$ resulta de (3.20) que, en $\text{SGL}(m, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}_{\neq 0}^m$ es:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} F_s y^t x_{tl} &= F^{tj} x_{sj} x_{tl} = \\ &= F^{jt} x_{sj} x_{tl} = \\ &= F^{tj} x_{st} x_{jl} = \\ &= F^{tj} x_{lj} x_{ts} = \\ &= \frac{1}{2} F_l y^t x_{ts} \end{aligned}$$

o sea:

$$F_s y^t x_{tl} = F_l y^t x_{ts} \quad (3.22)$$

Sea $A = \{(x,y) \in \text{SGL}(m, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}_{\neq 0}^m : \exists 1 \leq r \leq m \text{ con } y^j x_{jr} = 0\}$.

Luego de (3.22) será:

$$\frac{F_s}{y^t x_{ts}} = \frac{F_\ell}{y^t x_{t\ell}} = c, \text{ en } (SGL(m, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}_{\neq 0}^m)^{-A}$$

donde c es una constante. Como $SGL(m, \mathbb{R})$ es una subvariedad de $GL(m, \mathbb{R})$, por continuidad tendremos que:

$$F_s = c y^t x_{ts}, \text{ en } SGL(m, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}_{\neq 0}^m \quad (3.23)$$

Para cada $t \in \mathbb{R}_{\neq 0}$ sea:

$$S_t = \{(x, y) \in SGL(m, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}_{\neq 0}^m : x_{ij} y^i y^j = t\}$$

Luego S_t es una subvariedad de $SGL(m, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}_{\neq 0}^m$.

Sea $i: S_t \rightarrow SGL(m, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}_{\neq 0}^m$ la inclusión.

Consideremos F y las coordenadas del espacio restringidas a la subvariedad $SGL(m, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}_{\neq 0}^m$. Son válidas entonces las relaciones (3.21) y (3.22). Tenemos entonces que:

$$\begin{aligned} d(F/S_t) &= d(F \circ i) = i^*(dF) = \\ &= i^*(F^{ij} dx_{ij} + F_s dy^s) = \\ &\quad \text{(por (3.21))} \\ &= i^*\left(\frac{1}{2} F_s y^i x^{sj} dx_{ij} + F_s dy^s\right) = \\ &\quad \text{(por (3.23))} \\ &= i^*\left(\frac{1}{2} c y^t x_{ts} x^{sj} y^i dx_{ij} + c y^i x_{ij} dy^j\right) = \\ &\quad (x_{ts} x^{sj} = \delta_t^j) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} c^i (y^j y^i dx_{ij} + 2x_{ij} y^i dy^j) = \\
&= \frac{1}{2} c^i (d(x_{ij} y^i y^j)) = \\
&= \frac{1}{2} c (d((x_{ij} y^i y^j) \circ i)) = \\
&\quad ((x_{ij} y^i y^j) \circ i = \text{cte}) \\
&= \frac{1}{2} c \cdot 0 = \\
&= 0
\end{aligned}$$

De donde:

$$F/S_t = \text{cte} = f(t)$$

para una cierta función $f: \mathbb{R}_{\neq 0} \rightarrow \mathbb{R}$.

Luego $\forall (a,b) \in \text{SGL}(m, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}_{\neq 0}^m$ tal que $a_{ij} b^i b^j \neq 0$ es:

$$F(a,b) = f((x_{ij} y^i y^j)(a,b)) \quad (3.24)$$

Ahora bien, dado $p \in M$, sea (x,U) una carta de M alrededor de p . Luego $G = g_{ij} dx^i \otimes dx^j$ y $\varphi = \varphi^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ en esa carta. Como $G(\varphi, \varphi)$ es nunca nulo resulta que $g_{ij} \varphi^i \varphi^j$ es nunca nulo. Además es $g_{ij}(q) \in \text{SGL}(m, \mathbb{R}) \forall q \in U$. Por lo tanto de (3.13) y (3.24) tenemos que:

$$L(p) = F(g_{ij}(p), \varphi^i(p)) = f(g_{ij}(p) \varphi^i(p) \varphi^j(p)) = (f \circ G(\varphi, \varphi))(p)$$

Q.E.D.

3.6. Definición

Sea $L: M \rightarrow \mathbb{R}$ un escalar definido sobre una variedad diferenciable m -dimensional M . Sea $G \in D_2^0(M)$ un tensor 2-covariante, simétrico

y no-singular y sea $\phi: M \rightarrow \mathbb{R}$ un escalar, tales que $G(\text{grad } \phi, \text{grad } \phi)$ es nunca nulo.

Diremos que L es concomitante de G y ϕ y sus primeras derivadas, o sea $L = L(g_{ij}; g_{ij,l}; \phi; \phi_{,i})$, si existe un 1-operador escalar de $(0,2;0,0)$ -concomitancia $F: GL(m, \mathbb{R}) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_{\neq 0}^m \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

i) $F/GL(m, \mathbb{R}) \times \{(b, c, d)\}$ es simétrica $\forall (b, c, d) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_{\neq 0}^m$

o sea:

$$F(a, b, c, d) = F(a^t, b, c, d) \quad (3.25)$$

donde a^t significa transpuesta de a .

ii) Para cada carta local (x, U) de M :

$$L(p) = F(g_{ij}(p), \phi(p), g_{ij,l}(p), \phi_{,i}(p)), \quad \forall p \in U \quad (3.26)$$

donde $G = g_{ij} dx^i \otimes dx^j$ en esa carta y donde la coma indica derivada parcial usual.

3.7. Teorema [9]

Si L es un escalar concomitante de un tensor 2-covariante, simétrico y no-singular G y de un escalar ϕ y sus primeras derivadas, tales que $G(\text{grad } \phi, \text{grad } \phi)$ es nunca nulo, existe entonces una función $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\neq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ C^∞ tal que:

$$L = f(\phi, G(\text{grad } \phi, \text{grad } \phi)) \quad (3.27)$$

Dem.:

Por 3.6 existe un 1-operador escalar de $(0,2;0,0)$ -concomitancia

$F: GL(m, \mathbb{R}) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m^3} \times \mathbb{R}_{\neq 0}^m \rightarrow \mathbb{R}$ verificando (3.25) y (3.26). En este caso es $k=1$ y por lo tanto es fácil ver que:

$$q = \frac{m^2(m+1)}{2}$$

(3.28)

y

$$h-m = m^2 + 1 + m^3 + m$$

De aquí, la acción $H(=H^1)$ definida por (2.5) es la aplicación:

$$H: GL(m, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^q \times GL(m, \mathbb{R}) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m^3} \times \mathbb{R}_{\neq 0}^m \rightarrow GL(m, \mathbb{R}) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m^3} \times \mathbb{R}_{\neq 0}^m$$

dada por:

$$\begin{aligned} H(B, a, b, c, d) = & (B_i^r B_j^\ell a_{r\ell}, b, B_{is}^r B_j^\ell a_{r\ell} + B_i^r B_{js}^\ell a_{r\ell} + \\ & + B_i^r B_j^\ell B_s^t c_{r\ell t}, B_i^j d_j) \end{aligned}$$

(3.29)

donde $B = (B_j^i, B_{j\ell}^i) \in GL(m, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^q$ y q está dado por (3.28). Notamos:

$$(B_j^i, B_{j\ell}^i, x_{ij}, x, x_{ij\ell}, x_i)$$

las coordenadas de $GL(m, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^q \times GL(m, \mathbb{R}) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m^3} \times \mathbb{R}_{\neq 0}^m$. Las identidades de invariancia correspondientes para este operador son:

$$\left(\frac{\partial (F \circ H)}{\partial B_t^s} (C, a, b, c, d) \right) = 0$$

(3.30)

y

$$\left(\frac{\partial (F \circ H)}{\partial B_{tr}^s} (C, a, b, c, d) \right) = 0$$

Consideramos la siguiente notación:

$$F^{ij} = \frac{\partial F}{\partial x_{ij}}, \quad F' = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad F^{ij\ell} = \frac{\partial F}{\partial x_{ij\ell}}, \quad F^i = \frac{\partial F}{\partial x_i}$$

La condición (3.25) nos dice que:

$$F^{ij} = F^{ji} \quad (3.31)$$

Luego es fácil ver que en particular tomando $C=(I,0)$ y usando (3.29) y (3.31) las ecuaciones (3.30) se convierten en:

$$\begin{aligned} & F^{it}(a,b,c,d)(a_{si} + a_{is}) + F^{ijt}(a,b,c,d) c_{ijs} + \\ & + F^{jti}(a,b,c,d) c_{jsi} + F^{tij}(a,b,c,d) c_{sij} + F^t(a,b,c,d) d_s = \\ & = 0. \end{aligned} \quad (3.32)$$

$$\text{y} \quad F^{jtr}(a,b,c,d) (a_{sj} + a_{js}) = 0 \quad (3.33)$$

En particular si $a \in \text{SGL}(m, \mathbb{R})$ (matrices simétricas e inversibles) resulta de (3.33) que:

$$F^{jtr}(a,b,c,d) a_{sj} = 0$$

y como a es inversible, en $\text{SGL}(m, \mathbb{R}) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_{\neq 0}^m$ es:

$$F^{jtr} \equiv 0 \quad (3.34)$$

de donde reemplazando en (3.32) resulta:

$$2 F^{it} x_{is} + F^t x_s = 0$$

de donde:

$$F^{it} = - \frac{1}{2} F^t x_s x^{si} \quad (3.35)$$

donde $x^{si}(a) = (a^{-1})_{si}$. Como por (3.31) el primer término de esta igualdad es simétrico en i y t también lo debe ser el segundo, luego:

$$F^t x_s x^{si} = F^i x_s x^{st} \quad (3.36)$$

Sea $A = \{(a, b, c, d) \in \text{SGL}(m, \mathbb{R}) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m^3} \times \mathbb{R}_{\neq 0}^m : \exists 1 \leq r \leq m \text{ con } a^{sr} d_r = 0\}$.

Luego de (3.36), tenemos que fuera de A :

$$\frac{F^t}{x_s x^{st}} = \frac{F^i}{x_s x^{si}} = c$$

donde c es una constante. Como $\text{SGL}(m, \mathbb{R})$ es una subvariedad de $\text{GL}(m, \mathbb{R})$, por continuidad resulta que:

$$F^i = c x_s x^{si} \quad (3.37)$$

en todo $\text{SGL}(m, \mathbb{R}) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m^3} \times \mathbb{R}_{\neq 0}^m$.

Para cada $t \in \mathbb{R}_{\neq 0}$ y cada $u \in \mathbb{R}$ sea:

$$S_{t,u} = \{x^{ij} x_i x_j = t \wedge x = u\}$$

Luego $S_{t,u}$ es una subvariedad de $\text{SGL}(m, \mathbb{R}) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m^3} \times \mathbb{R}_{\neq 0}^m$ con inclusión i .

Consideremos F restringida a la subvariedad $\text{SGL}(m, \mathbb{R}) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m^3} \times \mathbb{R}_{\neq 0}^m$. Son válidas entonces las relaciones (3.34), (3.35) y (3.37). Resulta entonces que:

$$\begin{aligned} d(F/S_{t,u}) &= d(F \circ i) = i^*(dF) = \\ &= i^*(F^{ij} dx_{ij} + F' dx + F^{ij\ell} dx_{ij\ell} + \\ &\quad + F^i dx_i) = \\ &\quad \quad \quad (\text{por (3.34)}) \\ &= i^*(F^{ij} dx_{ij} + F^i dx_i + F' dx) = \\ &= i^*(F^{ij} dx_{ij} + F^i dx_i) + F' d(x \circ i) = \\ &\quad \quad \quad (x \circ i = \text{cte}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= i^* (F^{ij} dx_{ij} + F^i dx_i) = \\
&\quad \text{(por (3.35))} \\
&= i^* \left(-\frac{1}{2} F^j x_s x^{si} dx_{ij} + F^i dx_i \right) = \\
&\quad \text{(por (3.37))} \\
&= i^* \left(-\frac{1}{2} c x_\ell x^{\ell j} x_s x^{si} dx_{ij} + c x_\ell x^{\ell i} dx_i \right) = \\
&= \frac{1}{2} c i^* (-x_\ell x_s x^{\ell j} x^{si} dx_{ij} + 2 x_\ell x^{\ell i} dx_i) = \\
&= \frac{1}{2} c i^* (d(x^{ij} x_i x_j)) = \\
&= \frac{1}{2} c (d((x^{ij} x_i x_j) \circ i)) = \\
&\quad ((x^{ij} x_i x_j) \circ i = \text{cte}) \\
&= \frac{1}{2} c \cdot 0 = 0
\end{aligned}$$

donde hemos usado que $dx^{ij} = -x^{ij} x^{jr} dx_{jr}$ y la simetría $x^{ij} = x^{ji}$ en $\text{SGL}(m, \mathbb{R})$. Luego es:

$$F/S_{t,u} = \text{cte} = f(u, t)$$

para una cierta función $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\neq 0} \rightarrow \mathbb{R}$.

Luego para todo $(a, d) \in \text{SGL}(m, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}_{\neq 0}^m$ tal que $a^{ij} d_i d_j \neq 0$ es:

$$F(a, b, c, d) = f(x(b), (x^{ij} x_i x_j)(a, d)) \quad (3.38)$$

Dado $p \in M$, sea (x, U) una carta de M alrededor de p . Luego $G = g_{ij} dx^i \otimes dx^j$ en esa carta. La condición de que $G(\text{grad } \phi, \text{grad } \phi)$ es nunca nulo se traduce, en términos de coordenadas, en la condición que $g^{ij} \phi_{,i} \phi_{,j}$ es nunca nulo. Además es $g_{ij}(q) \in \text{SGL}(m, \mathbb{R}) \forall q \in U$. Por lo tanto de (3.26) y (3.38) se concluye que:

$$\begin{aligned}
 L(p) &= F(g_{ij}(p), \phi(p), g_{ij,l}(p), \phi_{,i}(p)) = f(\phi(p), g^{ij}(p) \phi_{,i}(p) \phi_{,j}(p)) \\
 &= f(\phi(p), G(\text{grad } \phi, \text{grad } \phi)(p))
 \end{aligned}$$

Q.E.D.

3.8. Definición

Sea $L: M \rightarrow \mathbb{R}$ un escalar definido sobre una variedad diferenciable m -dimensional M . Sean G y $F \in D_2^0(M)$ dos tensores 2-covariantes y no-singulares con G simétrico y F antisimétrico.

Diremos que L es concomitante de G y F , o sea $L = L(g_{ij}; F_{ij})$, sii existe un 0-operador escalar de $(0,2;0,2)$ -concomitancia $T: GL(m, \mathbb{R}) \times GL(m, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

$$i) \quad T_{/GL(m, \mathbb{R}) \times \{b\}} \quad \text{es simétrico } \forall b \in GL(m, \mathbb{R})$$

y

$$T_{/\{a\} \times GL(m, \mathbb{R})} \quad \text{es antisimétrico } \forall a \in GL(m, \mathbb{R})$$

o sea:

$$T(a, b) = T(a^t, b)$$

y

$$T(a, b) = -T(a, b^t)$$

(3.39)

donde la t significa transpuesta.

ii) Para cada carta local (x, U) de M :

$$L(p) = T(g_{ij}(p), F_{ij}(p)), \quad \forall p \in U \quad (3.40)$$

donde $G = g_{ij} dx^i \otimes dx^j$ y $F = F_{ij} dx^i \otimes dx^j$ en esa carta.

3.9. Teorema [11] y [14]

Si L es un escalar sobre una variedad 4-dimensional M concomitante de dos tensores 2-covariantes y no-singulares G simétrico

y F antisimétrico, *existe* entonces una función $f: \mathbb{R}_{\neq 0} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad C^\infty$ tal que:

$$L = f(\phi, \psi) \quad (3.41)$$

donde $\phi = \det(F_{ij} \, g^{jk})$ y $\psi = F_{rs} F_{ij} g^{ri} g^{sj}$, siendo F_{ij} y g_{ij} las coordenadas de F y G y $(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$.

Dem.:

Por 3.8 existe un 0-operador escalar de $(0,2;0,2)$ -concomitancia $T: GL(4, \mathbb{R}) \times GL(4, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ verificando (3.39) y (3.40). Como $k = 0$ y $m=4$ entonces:

$$q=0, \quad n=4^2 + 4^2 \quad y \quad h-4 = 4^2 + 4^2$$

Luego la acción $H(=H^0)$ es la aplicación:

$$H: GL(4, \mathbb{R}) \times GL(4, \mathbb{R}) \times GL(4, \mathbb{R}) \rightarrow GL(4, \mathbb{R}) \times GL(4, \mathbb{R})$$

dada por

$$H(B, a, b) = (B_r^i B_s^j a_{ij}, B_r^i B_s^j b_{ij})$$

Si notamos:

$$(x_{ij}, y_{ij})$$

las coordenadas de $GL(4, \mathbb{R}) \times GL(4, \mathbb{R})$ (dominio de T) y con:

$$T^{ij} = \frac{\partial T}{\partial x_{ij}}, \quad T'^{ij} = \frac{\partial T}{\partial y_{ij}}$$

entonces las identidades de invariancia correspondientes para T nos dicen que:

$$T^{ir}(a, b) a_{jr} + T^{ri}(a, b) a_{rj} + T'^{ir}(a, b) b_{jr} + T'^{ri}(a, b) b_{rj} = 0$$

Si en particular $a \in SGL(4, \mathbb{R})$ (matrices simétricas inversibles) y $b \in AGL(4, \mathbb{R})$ (matrices antisimétricas inversibles) resulta que:

$$(T^{ir}(a,b) + T^{ri}(a,b)) a_{rj} + (-T'^{ir}(a,b) + T'^{ri}(a,b)) b_{rj} = 0 \quad (3.42)$$

Pero la condición (3.39) nos dice que:

$$T^{ir} = T^{ri}, \quad T'^{ir} = -T'^{ri} \quad (3.43)$$

Reemplazando (3.43) en (3.42) tenemos entonces que en $SGL(4, \mathbb{R}) \times AGL(4, \mathbb{R})$ es:

$$T^{ri} x_{rj} + T'^{ri} y_{rj} = 0$$

de donde:

$$T^{si} = -x^{js} y_{rj} T'^{ri} \quad (3.44)$$

donde (como siempre) $x^{js}(a) = (a^{-1})_{js}$.

Consideremos ahora sobre la subvariedad $SGL(4, \mathbb{R}) \times AGL(4, \mathbb{R})$ los siguientes escalares:

$$\phi = \det(y_{ij} x^{js}) = \frac{\det(y_{ij})}{\det(x_{rs})} \quad (3.45)$$

$$\psi = y_{hk} y_{ij} x^{hi} x^{kj}.$$

Para cada $\alpha \in \mathbb{R}_{\neq 0}$ y $\beta \in \mathbb{R}$ sea:

$$S_{\alpha, \beta} = \{(a,b) \in SGL(4, \mathbb{R}) \times AGL(4, \mathbb{R}) : \phi(a,b) = \alpha \text{ y } \psi(a,b) = \beta\}$$

Luego $S_{\alpha, \beta}$ es una subvariedad de $SGL(4, \mathbb{R}) \times AGL(4, \mathbb{R})$. Sea i la inclusión. Luego:

$$\phi|_{S_{\alpha, \beta}} = \alpha \quad \text{y} \quad \psi|_{S_{\alpha, \beta}} = \beta$$

y por lo tanto:

$$d(\phi \circ i) = 0, \quad d(\psi \circ i) = 0 \quad (3.46)$$

Es fácil ver de (3.45) que:

$$\begin{aligned} d\phi &= y^{tr} dy_{tr} - x^{tr} dx_{tr} \\ d\psi &= x^{is} x^{jt} y_{st} dy_{ij} - x^{hl} x^{tk} y_{lk} x^{rs} y_{hr} dx_{st} \end{aligned} \quad (3.47)$$

Es fácil ver que por ser T un 0-operador escalar de $(0,2;0,2)$ -concomitancia, T'^{rs} resulta ser un 0-operador tensorial de $(0,2;0,2)$ -concomitancia de tipo $(2,0)$ y peso 0. Por lo tanto, por ser la variedad 4-dimensional, el Corolario 2.1 de [5] nos asegura que $\forall (a,b) \in \text{SGL}(4,\mathbb{R}) \times \text{AGL}(4,\mathbb{R})$:

$$T'^{ij}(a,b) = C_1(a,b) b^{ij} + C_2(a,b) a^{ir} a^{js} b_{rs}$$

y por lo tanto:

$$T'^{ij} = C_1 y^{ij} + C_2 x^{ir} x^{js} y_{rs} \quad (3.48)$$

Consideremos T restringido a la subvariedad $\text{SGL}(4,\mathbb{R}) \times \text{AGL}(4,\mathbb{R})$, se verifican entonces (3.44), (3.46), (3.47) y (3.48) y por lo tanto:

$$\begin{aligned} d(T/S_{\alpha,\beta}) &= d(T \circ i) = i^*(dT) = \\ &= i^*(T'^{ij} dx_{ij} + T'^{ij} dy_{ij}) = \quad (\text{por (3.44)}) \\ &= i^*(-x^{tj} y_{ts} T'^{is} dx_{ij} + T'^{ij} dy_{ij}) = \\ &= i^*(T'^{ij} (-x^{ts} y_{tj} dx_{is} + dy_{ij})) = \quad (\text{por (3.48)}) \\ &= i^*[(C_1 y^{ij} + C_2 x^{ir} x^{jl} y_{rl})(-x^{ts} y_{tj} dx_{is} + dy_{ij})] = \\ &= i^*[C_1(-y^{ij} y_{tj} x^{ts} dx_{is} + y^{ij} dy_{ij}) + \\ &\quad + C_2(-x^{ir} x^{jl} y_{rl} x^{ts} y_{tj} dx_{is} + x^{ir} x^{jl} y_{rl} dy_{ij})] = \quad (\text{por (3.47)}) \\ &= i^*(C_1 d\phi + C_2 d\psi) = \\ &= (C_1 \circ i) d(\phi \circ i) + (C_2 \circ i) d(\psi \circ i) = \quad (\text{por (3.46)}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

De aquí:

$$T/S_{\alpha, \beta} = \text{cte} = f(\alpha, \beta)$$

para una cierta función $f: \mathbb{R}_{\neq 0} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Luego para todo $(a, b) \in \text{SGL}(4, \mathbb{R}) \times \text{AGL}(4, \mathbb{R})$ es:

$$T(a, b) = f(\phi(a, b), \psi(a, b)) \quad (3.49)$$

donde ϕ y ψ están dadas por (3.45).

Por último, para concluir el teorema, consideremos $p \in M$ y (x, U) una carta de M alrededor de p . Luego es $G = g_{ij} dx^i \otimes dx^j$ y $F = F_{ij} dx^i \otimes dx^j$ en esa carta con $g_{ij}(q) \in \text{SGL}(4, \mathbb{R})$ y $F_{ij}(q) \in \text{AGL}(4, \mathbb{R}) \forall q \in U$, por lo tanto de (3.40) y (3.49) se concluye que:

$$L(p) = T(g_{ij}(p), F_{ij}(p)) = f(\phi(g_{ij}(p), F_{ij}(p)), \psi(g_{ij}(p), F_{ij}(p)))$$

que es (3.41).

Q.E.D.

3.10. Definición

Sea $L: M \rightarrow \mathbb{R}$ un escalar definido sobre una variedad diferenciable m -dimensional M . Sea $G \in D_2^0(M)$ un tensor 2-covariante simétrico y no-singular y sea $\psi \in D_1^1(M)$ una 1-forma tales que $G(\varphi, \varphi)$ es nunca nulo, donde φ es el único campo vectorial ($\varphi \in D^1(M)$) tal que $G(\varphi, \cdot) = \psi$.

Diremos que L es concomitante de G y ψ , o sea $L = L(g_{ij}; \psi_i)$, sii existe un 0-operador escalar de $(0, 2; 0, 1)$ -concomitancia $F: \text{GL}(m, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}_{\neq 0}^m \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

i) $F_{/\text{GL}(m, \mathbb{R}) \times \{b\}}$ es simétrico $\forall b \in \mathbb{R}_{\neq 0}^m$, o sea:

$$F(a, b) = F(a^t, b) \quad (3.50)$$

ii) Para cada carta Local (x,U) de M :

$$L(p) = F(g_{ij}(p), \psi_i(p)) , \quad \forall p \in U \quad (3.51)$$

donde $G = g_{ij} dx^i \otimes dx^j$ y $\psi = \psi_i dx^i$ en esa carta.

3.11. Teorema

Si L es un escalar concomitante de un tensor 2-covariante, simétrico y no-singular G y de una 1-forma ψ , tal que $G(\varphi, \varphi)$ es nunca nulo, siendo φ el único campo vectorial tal que $G(\varphi, \cdot) = \psi$, existe entonces una función $f: \mathbb{R}_{\neq 0}^m \rightarrow \mathbb{R}$ C^∞ tal que:

$$F = f \circ G(\varphi, \varphi) \quad (3.52)$$

Dem.:

Por 3.10 existe un 0-operador escalar de $(0,2;0,1)$ -concomitancia $F: GL(m, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}_{\neq 0}^m \rightarrow \mathbb{R}$ verificando (3.50) y (3.51). Como $k=0$ resulta en este caso:

$$q=0, \quad n=m^2 + m, \quad h-m = m^2 + m.$$

Luego la acción $H(=H^\circ)$ es la aplicación:

$$H: GL(m, \mathbb{R}) \times GL(m, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}_{\neq 0}^m \rightarrow GL(m, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}_{\neq 0}^m \quad \text{dada por:}$$

$$H(B, a, b) = (B_r^i B_s^j a_{ij}, B_r^i b_i).$$

Si notamos:

$$(x_{ij}, y_i)$$

las coordenadas de $GL(m, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}_{\neq 0}^m$ (dominio de F) y con:

$$F^{ij} = \frac{\partial F}{\partial x_{ij}}, \quad F^i = \frac{\partial F}{\partial y_i}$$

resulta de las identidades de invariancia de F que:

$$F^{ts}(a,b) a_{\ell s} + F^{rt}(a,b) a_{r\ell} + F^t(a,b) b_{\ell} = 0$$

Si en particular $a \in \text{SGL}(m, \mathbb{R})$ será:

$$(F^{ts}(a,b) + F^{st}(a,b)) a_{\ell s} + F^t(a,b) b_{\ell} = 0$$

Pero (3.50) nos dice que:

$$F^{ij} = F^{ji} \quad (3.53)$$

de donde , en $\text{SGL}(m, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}_{\neq 0}^m$:

$$2F^{ts} x_{\ell s} + F^t y_{\ell} = 0$$

y por lo tanto:

$$F^{ts} = -\frac{1}{2} F^t y_{\ell} x^{\ell s} \quad (3.54)$$

Como (3.53) nos asegura que el primer término de (3.54) es simétrico en t y s también lo debe ser el segundo. Luego:

$$F^t y_{\ell} x^{\ell s} = F^s y_{\ell} x^{\ell t} \quad (3.55)$$

Sea $A = \{(a,b) \in \text{SGL}(m, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}_{\neq 0}^m : \exists 1 \leq r \leq m \text{ con } x^{ir} y_i = 0\}$.

Resulta entonces de (3.55) que fuera de A es:

$$\frac{F^t}{y_{\ell} x^{\ell t}} = \frac{F^s}{y_{\ell} x^{\ell s}} = c$$

donde c es una constante. Como $\text{SGL}(m, \mathbb{R})$ es una subvariedad de $\text{GL}(m, \mathbb{R})$, por continuidad resulta que:

$$F^i = c y_j x^{ij} \quad (3.56)$$

en todo $\text{SGL}(m, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}_{\neq 0}^m$.

Para cada $t \in \mathbb{R}_{\neq 0}$ sea:

$$S_t = \{(a,b) \in \text{SGL}(m, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^m : (x^{ij} y_i y_j)(a,b) = t\}$$

Luego S_t es una subvariedad de $\text{SGL}(m, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}_{\neq 0}^m$. Sea i su inclusión.

Consideremos F restringido a la subvariedad $\text{SGL}(m, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}_{\neq 0}^m$. Se verifican entonces (3.54) y (3.56), tenemos entonces que:

$$\begin{aligned} d(F|_{S_t}) &= d(F \circ i) = i^*(dF) = \\ &= i^*(F^{ij} dx_{ij} + F^i dy_i) = \quad (\text{por (3.54)}) \\ &= i^*\left(-\frac{1}{2} F^i y_r x^{rj} dx_{ij} + F^i dy_i\right) = \quad (\text{por (3.56)}) \\ &= i^*\left(-\frac{1}{2} c y_s x^{is} y_r x^{rj} dx_{ij} + c y_s x^{is} dy_i\right) = \\ &= \left(\frac{1}{2} c\right) i^*(-y_s y_r x^{is} x^{rj} dx_{ij} + 2 y_s x^{is} dy_i) = \\ &= \left(\frac{1}{2} c\right) i^*(d(y_r y_s x^{rs})) = \\ &= \left(\frac{1}{2} c\right) d((y_r y_s x^{rs}) \circ i) = \quad ((y_r y_s x^{rs}) \circ i = \text{cte}) \\ &= \left(\frac{1}{2} c\right) \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$F|_{S_t} = \text{cte} = f(t)$$

para una cierta $f: \mathbb{R}_{\neq 0}^m \rightarrow \mathbb{R}$

Luego $\forall (a,b) \in \text{SGL}(m, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}_{\neq 0}^m$ tal que $a^{ij} b_i b_j \neq 0$ ($a^{ij} = (a^{-1})_{ij}$)

es:

$$F(a,b) = f((x^{ij} y_i y_j)(a,b)) \quad (3.57)$$

Como siempre, dado $p \in M$ sea (x, U) una carta de M alrededor de p . Luego $G = g_{ij} dx^i \otimes dx^j$ y $\psi = \psi_i dx^i$ en esa carta. La condición

$G(\varphi, \varphi)$ nunca nulo implica, en coordenadas, la condición $g^{ij} \psi_i \psi_j$ nunca nulo y como además es $g_{ij}(q) \in \text{SGL}(m, \mathbb{R}) \forall q \in U$ se concluye de (3.51) y (3.57) que:

$$\begin{aligned} L(p) &= F(g_{ij}(p), \psi_i(p)) = f(g^{ij}(p) \psi_i(p) \psi_j(p)) = \\ &= (f \circ G(\varphi, \varphi))(p) \end{aligned}$$

Q.E.D.

3.12. Observación

En los teoremas 3.3, 3.5, 3.7, 3.9 y 3.11 hemos probado la existencia de ciertas funciones f que caracterizan los concomitantes allí dados. Hemos asegurado también que esas funciones son de tipo C^∞ . Sin embargo no queda claro de nuestras demostraciones que este último hecho sea cierto. Demostraremos entonces aquí un resultado general que abarca todos nuestros casos.

Sean $g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R} \ C^\infty$ y $h: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n \ C^\infty$ de rango n ($n \leq m$). Sea $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $g = f \circ h$. Entonces f resulta C^∞ .

Dem.:

Como h tiene rango n podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que localmente:

$$\det A \neq 0 \quad \text{siendo } A = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial h_n}{\partial x^1} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial h_1}{\partial x^n} & \dots & \frac{\partial h_n}{\partial x^n} \end{pmatrix}$$

Sea entonces $\tilde{h}: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ dada por:

$$\tilde{h}(x^1, \dots, x^m) = (h_1(x^1, \dots, x^m), \dots, h_n(x^1, \dots, x^m), x^{n+1}, \dots, x^m),$$

o sea,

$$\tilde{h} = (h_1, \dots, h_n, \pi_{n+1}, \dots, \pi_m)$$

donde $\pi_i: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ es la proyección a la i -ésima coordenada.

Luego \tilde{h} es C^∞ y:

$$D(\tilde{h}) = \begin{pmatrix} -\frac{A}{0} & -\frac{X}{I} \end{pmatrix} \Rightarrow \det(D(\tilde{h})) \neq 0.$$

Concluimos entonces que, localmente, \tilde{h} es un difeomorfismo. Resulta entonces que:

$$h = (\pi_1 \times \dots \times \pi_n) \circ \tilde{h}$$

y por lo tanto:

$$g = f \circ (\pi_1 \times \dots \times \pi_n) \circ \tilde{h}$$

Ahora bien, como g y \tilde{h}^{-1} son C^∞ resulta que:

$$f \circ (\pi_1 \times \dots \times \pi_n) \text{ es } C^\infty.$$

Por último sea $I_{n,m}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ la inclusión natural

$$I_{n,m}(x^1, \dots, x^n) = (x^1, \dots, x^n, 0, \dots, 0)$$

por lo tanto $I_{n,m}$ es C^∞ y:

$$f = (f \circ (\pi_1 \times \dots \times \pi_n)) \circ I_{n,m}$$

de donde resulta lo afirmado. -///-

4.- TENSORES CONCOMITANTES DE UNA METRICA Y UN COVECTOR

En la Sección precedente hemos explicado porqué los conceptos desarrollados en la Sección 2 son necesarios en la teoría de los escalares concomitantes. En el caso de los tensores concomitantes aquella explicación sigue siendo válida, pero hay dos razones de peso que hacen que elijamos, a partir de ahora, el tratamiento clásico. La primera es que, en general, los resultados sobre tensores concomitantes se obtienen recurrentemente, o sea se basan en resultados previos sobre tensores concomitantes de menor orden y por lo tanto sobre escalares concomitantes (para determinar la forma general de los tensores concomitantes de ciertos tensores dados es necesario determinar primero la forma general de los escalares concomitantes de esos tensores). La segunda es que, como siempre ocurre, una vez que una cierta teoría se ha desarrollado y entendido pueden, y deben, tomarse ciertas libertades de notación y argumentación.

4.1. Introducción

Sean g_{ij} las componentes de un tensor métrico y ψ_i las componentes de un covector en una variedad m -dimensional M . Es ya conocida [4] la forma general de los tensores de tipo (r,s) concomitantes de g_{ij} y ψ_i en los casos $0 \leq r + s \leq 2$. Los casos $r+s=3$ y $r+s=4$ también han sido determinados en [4] pero bajo ciertas condiciones restrictivas de simetría en sus índices.

En esta Sección determinaremos en general (sin restricciones de ningún tipo) todos los tensores de tipo (r,s) concomitantes de g_{ij} y ψ_i para $r+s = 3$ y $r+s = 4$. Observemos antes que los escalares están determinados por el Teorema 3.11 y los tensores de orden 1 y 2 por los siguientes dos teoremas:

4.2. Teorema [4]

$$\text{Si } L_i = L_i(g_{rs}; \psi_r)$$

existen entonces funciones α y β tales que:

$$L_i = \alpha(\rho) \psi_i + \delta_2^m [\beta(\rho) \sqrt{g} \psi^r \epsilon_{ri}] \quad (4.1)$$

donde $\psi^r = g^{rs} \psi_s$, $g = \det(g_{rs})$, ϵ_{ri} es la densidad tensorial de Levi-Civita y donde ρ es un escalar dado por:

$$\rho = g^{rs} \psi_r \psi_s \quad (4.2)$$

./../.

4.3. Teorema [4]

$$\text{Si } L_{ij} = L_{ij}(g_{rs}; \psi_r)$$

existen entonces funciones α_i ($1 \leq i \leq 6$) tales que:

$$\begin{aligned} L_{ij} = & (1 - \delta_1^m) [\alpha_1(\rho) \psi_i \psi_j + \alpha_2(\rho) g_{ij}] + \\ & + \delta_3^m [\alpha_3(\rho) \sqrt{g} \psi^r \epsilon_{rij}] + \\ & + \delta_2^m [\alpha_4(\rho) \sqrt{g} \psi_j \psi^r \epsilon_{ri} + \alpha_5(\rho) \sqrt{g} \epsilon_{ij}] + \\ & + \delta_1^m [\alpha_6(\rho) g_{11}] \end{aligned} \quad (4.3)$$

donde $\epsilon_{i_1 \dots i_r}$ es la densidad tensorial de Levi-Civita y ρ viene dada por (4.2)././..

4.4. Teorema

$$\text{Si } L_{ijh} = L_{ijh}(g_{rs}; \psi_r)$$

existen entonces funciones α_i ($1 \leq i \leq 18$) tales que:

$$\begin{aligned} L_{ijh} = & (1 - \delta_1^m) [\alpha_1(\rho) \psi_i \psi_j \psi_h + \alpha_2(\rho) \psi_i g_{jh} + \alpha_3(\rho) \psi_j g_{ih} + \\ & + \alpha_4(\rho) \psi_h g_{ij}] + \\ & + \delta_4^m [\alpha_5(\rho) \sqrt{g} \psi^r \epsilon_{rijh}] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \delta_3^m [\sqrt{g} [\alpha_6(\rho) \psi_i \psi^r \epsilon_{rjh} + \alpha_7(\rho) \psi_j \psi^r \epsilon_{rih} + \\
& \quad + \alpha_8(\rho) \psi_h \psi^r \epsilon_{rij} + \alpha_9(\rho) \epsilon_{ijh}]] + \\
& + \delta_2^m [\sqrt{g} [\alpha_{10}(\rho) \psi_i \epsilon_{jh} + \alpha_{11}(\rho) \psi_j \epsilon_{ih} + \alpha_{12}(\rho) \psi_h \epsilon_{ij} + \\
& \quad + \alpha_{13}(\rho) \psi_i \psi_h \psi^r \epsilon_{rj} + \alpha_{14}(\rho) \psi_j \psi_h \psi^r \epsilon_{ri} + \\
& \quad + \alpha_{15}(\rho) g_{ij} \psi^r \epsilon_{rh} + \alpha_{16}(\rho) g_{ih} \psi^r \epsilon_{rj} + \\
& \quad + \alpha_{17}(\rho) g_{jh} \psi^r \epsilon_{ri}]] + \\
& + \delta_1^m [\alpha_{18}(\rho) g_{11} \psi_1] \tag{4.4}
\end{aligned}$$

donde $\epsilon_{i_1 \dots i_r}$ es la densidad tensorial de Levi-Civita y ρ viene dada por (4.2).

Dem.

Notamos:

$$L_{ijh}^{rs} = \frac{\partial L_{ijh}}{\partial g_{rs}}, \quad L_{ijh}^r = \frac{\partial L_{ijh}}{\partial \psi_r}$$

La identidad de invariancia correspondiente para L_{ijh} nos dice que:

$$(L_{ijh}^{bt} + L_{ijh}^{tb}) g_{at} = -L_{ijh}^b \psi_a + \delta_i^b L_{ajh} + \delta_j^b L_{iah} + \delta_h^b L_{ija}$$

contrayendo con g^{as} y usando la simetría de L_{ijh}^{bt} en b y t tenemos que:

$$2 L_{ijh}^{bt} = -L_{ijh}^b \psi^t + \delta_i^b g^{at} L_{ajh} + \delta_j^b g^{at} L_{iah} + \delta_h^b g^{at} L_{ija}$$

Como el primer miembro de esta igualdad es simétrico en b y t también lo debe ser el segundo, de donde:

$$\begin{aligned}
& - L_{ijh}^b \psi^t + \delta_i^b g^{at} L_{ajh} + \delta_j^b g^{at} L_{iah} + \delta_n^b g^{at} L_{ija} = \\
& = -L_{ijh}^t \psi^b + \delta_i^t g^{ab} L_{ajh} + \delta_j^t g^{ab} L_{iah} + \delta_h^t g^{ab} L_{ija}
\end{aligned} \tag{4.5}$$

contrayendo $b=i$ y contrayendo luego con g_{ts} en (4.5) resulta que:

$$\begin{aligned}
(m-1) L_{sjh} + L_{jsh} + L_{hjs} &= L_{ijh}^i \psi_s - L_{ijh}^t \psi^i g_{ts} + \\
& + g_{js} g^{ai} L_{iah} + g_{hs} g^{ai} L_{ija}
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Pero:

$$L_{ijh}^t \psi^i g_{ts} = (L_{ijh} \psi^i)^{,t} g_{ts} - L_{sjh}$$

$$\text{donde } (L_{ijh} \psi^i)^{,t} = \frac{\partial}{\partial \psi_t} (L_{ijh} \psi^i)$$

de donde reemplazando en (4.6):

$$\begin{aligned}
(m-2) L_{sjh} + L_{jsh} + L_{hjs} &= L_{ijh}^i \psi_s - (L_{ijh} \psi^i)^{,t} g_{ts} + \\
& + g_{js} g^{ai} L_{iah} + g_{hs} g^{ai} L_{ija}
\end{aligned}$$

Llamemos:

$$\begin{aligned}
\theta_{jhs} &= L_{ijh}^i \psi_s - (L_{ijh} \psi^i)^{,t} g_{ts} + g_{js} g^{ai} L_{iah} + \\
& + g_{hs} g^{ai} L_{ija}
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Podemos escribir entonces:

$$(m-2) L_{sjh} + L_{jsh} + L_{hjs} = \theta_{jhs} \tag{4.8}$$

Análogamente, si contraemos $b=j$ y $b=h$ en (4.5) obtenemos:

$$(m-2) L_{ish} + L_{sih} + L_{ihs} = \zeta_{ihs} \tag{4.9}$$

y

$$(m-2) L_{ijs} + L_{sji} + L_{isj} = \mu_{ijs} \tag{4.10}$$

donde:

$$\begin{aligned}\zeta_{ihs} = & L_{ijh}^j \psi_s - (L_{ijh} \psi^j)^{,t} g_{ts} + g_{is} g^{aj} L_{ajh} + \\ & + g_{hs} g^{aj} L_{ija}\end{aligned}\quad (4.11)$$

y

$$\begin{aligned}\mu_{ijs} = & L_{ijh}^h \psi_s - (L_{ijh} \psi^h)^{,t} g_{ts} + g_{is} g^{ah} L_{ajh} + \\ & + g_{js} g^{ah} L_{iah}\end{aligned}\quad (4.12)$$

Es claro que en las expresiones de θ_{jhs} , ζ_{ihs} y μ_{ijs} , dadas por (4.7), (4.11) y (4.12) respectivamente, sólo aparecen tensores concomitantes de g_{rs} y ψ_r 1-covariantes y 2-covariantes cuya forma general es ya conocida por los teoremas 4.2 y 4.3. Por lo tanto si pudiésemos despejar L_{ijh} en función de θ_{jhs} , ζ_{ihs} y μ_{ijs} habremos obtenido la forma general de los tensores 3-covariantes concomitantes de g_{rs} y ψ_r .

Ahora bien, podemos escribir:

$$L_{sjh} = S_{sjh} + A_{sjh} \quad (4.13)$$

donde S_{sjh} y A_{sjh} son tensores 3-covariantes concomitantes de g_{rt} y ψ_r satisfaciendo:

$$\begin{aligned}S_{sjh} &= S_{shj} \\ A_{sjh} &= -A_{shj}.\end{aligned}\quad (4.14)$$

Es claro entonces que para determinar L_{ijh} bastará determinar todos los tensores S_{ijh} y A_{ijh} satisfaciendo (4.14). Es claro también que S_{ijh} y A_{ijh} satisfacen ecuaciones análogas a (4.8), (4.9) y (4.10). En particular por (4.14) tenemos que:

$$(m-2) S_{sjh} + S_{jsh} + S_{hjs} = \theta_{jhs}(S) \quad (1)$$

$$(m-1) S_{sjh} + S_{jsh} = \zeta_{shj}(S) \quad (2)$$

$$(m-1) S_{sjh} + S_{hjs} = \mu_{sjh}(S) \quad (3)$$

donde (S) significa reemplazar L_{ijh} por S_{ijh} en (4.8), (4.9) y (4.10). Haciendo (3) + (2) - (1) obtenemos:

$$S_{sjh} = \frac{1}{m} [-\theta_{jhs}(S) + \zeta_{shj}(S) + \mu_{sjh}(S)] \quad (4.15)$$

lo que determina S_{sjh} totalmente.

Para determinar A_{sjh} procedemos en forma análoga. Teniendo en cuenta (4.14) podemos reescribir (4.8), (4.9) y (4.10) obteniendo para A_{jhs} las ecuaciones:

$$(m-2) A_{sjh} + A_{jsh} + A_{hjs} = \theta_{jhs}(A) \quad (4)$$

$$(m-3) A_{sjh} + A_{jsh} = \zeta_{shj}(A) \quad (5)$$

$$(m-3) A_{sjh} + A_{hjs} = \mu_{sjh}(A) \quad (6)$$

Haciendo (4) - (5) - (6) obtenemos:

$$(4-m) A_{sjh} = \theta_{jhs}(A) - \zeta_{shj}(A) - \mu_{sjh}(A)$$

y por lo tanto para $m \neq 4$:

$$A_{sjh} = \frac{1}{(m-4)} [-\theta_{jhs}(A) + \zeta_{shj}(A) + \mu_{sjh}(A)] \quad (4.16)$$

Sea entonces $m=4$ y definamos:

$$\eta^a = \frac{\epsilon^{acbu} A_{cbu}}{\sqrt{g}} \quad (4.17)$$

donde ϵ^{acbu} es la densidad tensorial de Levi-Civita. Es claro que η^a es un vector (tensor 1-contravariante) concomitante de g_{rs} y ψ_r y por lo tanto usando el hecho que $\eta_b = \eta^a g_{ab}$ es un covector también concomitante de g_{rs} y ψ_r y que η_b está bien determinado por el teorema 4.2 resulta que η^a es un vector cuya forma general es conocida.

Resulta de (4.17) que:

$$\sqrt{g} \eta^a \epsilon_{asjh} = \epsilon^{acbu} A_{cbu} \epsilon_{asjh} \quad (4.18)$$

Es fácil ver, teniendo en cuenta que $m=4$, que:

$$\begin{aligned} \epsilon^{acbu} A_{cbu} \epsilon_{asjh} &= A_{sjh} - A_{shj} - A_{jsh} + A_{jhs} - \\ &\quad - A_{hjs} + A_{hsj} \end{aligned}$$

de donde, por (4.14):

$$\epsilon^{acbu} A_{cbu} \epsilon_{asjh} = 2 [A_{sjh} + A_{jhs} + A_{hsj}] \quad (4.19)$$

Reemplazando (4.19) en (4.18) obtenemos:

$$2[A_{sjh} + A_{jhs} + A_{hsj}] = \sqrt{g} \eta^a \epsilon_{asjh} \quad (4.20)$$

Por otra parte reemplazando L_{ijh} por A_{ijh} en (4.8) y teniendo en cuenta que $m=4$ resulta que:

$$2 A_{sjh} + A_{jsh} + A_{hjs} = \theta_{jhs}(A) \quad (4.21)$$

Multiplicando (4.21) por 2, sumándole (4.20) y teniendo en cuenta (4.14), obtenemos en el caso $m=4$:

$$A_{sjh} = \frac{1}{6} [\theta_{jhs}(A) + \sqrt{g} \, n^a \, \epsilon_{asjh}]. \quad (4.22)$$

Teniendo en cuenta entonces (4.7), (4.11), (4.12), (4.13), (4.15), (4.16), (4.17), (4.22) y los teoremas 4.2 y 4.3 se concluye lo afirmado en (4.4).

Q.E.D.

4.5. Teorema

Un sistema de generadores para el espacio de los tensores 4-covariantes concomitantes de g_{rs} y ψ_r ($L_{ijkh} = L_{ijkh}(g_{rs}; \psi_r)$), con coeficientes funciones $\alpha = \alpha(\rho)$ donde ρ está dada por (4.2), viene dado por:

i) Si $m=1$

$$G_1 = \{g_{11} \, \psi_1 \, \psi_1\}$$

ii) Si $m > 5$

$$G_2 = \{\psi_i \, \psi_j \, \psi_k \, \psi_h ; \, g_{[ij} \, \psi_k \, \psi_h] ; \, g_{[ij} \, g_{kh]}\}$$

iii) Si $m=5$

$$G_3 = G_2 \cup \{\sqrt{g} \, \psi^s \, \epsilon_{sjkhi}\}$$

iv) Si $m=4$

$$G_4 = G_3 \cup \{\sqrt{g} \, \epsilon_{jkhi} ; \sqrt{g} \, \psi^s \, \epsilon_s [ijk \, \psi_h]\}$$

v) Si $\underline{m=3}$

$$G_5 = G_2 \cup \{ \sqrt{g} \psi^s \epsilon_{s[jk \psi_i \psi_h]}; \sqrt{g} \psi^s \epsilon_{s[jk g_{ih}]}; \\ ; \sqrt{g} \epsilon_{[jkh \psi_i]} \}$$

vi) Si $\underline{m=2}$

$$G_6 = G_2 \cup \{ \sqrt{g} \epsilon_{[jk \psi_i \psi_h]}; \sqrt{g} \epsilon_{jk g_{hi}}; \sqrt{g} \psi^s \epsilon_{s[j \psi_k \psi_i \psi_h]}; \\ \sqrt{g} \psi^s \epsilon_{s[j g_{ki} \psi_h]} \}$$

donde $\epsilon_{i_1 \dots i_r}$ es la densidad tensorial de Levi-Civita y donde los corchetes significan considerar el conjunto formado por todas las posibles simetrizaciones de los subíndices encerrados por ellos (por ejemplo:

$$\epsilon_{i[j g_{hk}] = \{ \epsilon_{ij} g_{hk}, \epsilon_{ij} g_{kh}, \epsilon_{ih} g_{kj}, \epsilon_{ih} g_{jk}, \epsilon_{ik} g_{jh}, \epsilon_{ik} g_{hj} \} = \\ = \{ \epsilon_{ij} g_{hk}, \epsilon_{ih} g_{kj}, \epsilon_{ik} g_{jh} \})$$

Dem.:

$$\text{Sea } L_{ijkh} = L_{ijkh}(g_{rs}; \psi_r)$$

Notamos:

$$L_{ijkh}^{rs} = \frac{\partial L_{ijkh}}{\partial g_{rs}}, \quad L_{ijkh}^r = \frac{\partial L_{ijkh}}{\partial \psi_r}$$

Usando la simetría $L_{ijkh}^{rs} = L_{ijkh}^{sr}$ de la identidad de invariancia correspondiente para L_{ijkh} resulta que:

$$2L_{ijkh}^{bt} = -L_{ijkh}^b \psi^t + \delta_i^b g^{at} L_{ajkh} + \delta_j^b g^{at} L_{iakh} + \\ + \delta_k^b g^{at} L_{ijah} + \delta_h^b g^{at} L_{ijka}$$

Usando nuevamente la simetría de L_{ijkh}^{bt} en b y t :

$$\begin{aligned}
 & -L_{ijkh}^b \psi^t + \delta_i^b g^{at} L_{ajkh} + \delta_j^b g^{at} L_{iakh} + \delta_k^b g^{at} L_{ijak} + \delta_h^b g^{at} L_{ijka} = \\
 & = -L_{ijkh}^t \psi^b + \delta_i^t g^{ab} L_{ajkh} + \delta_j^t g^{ab} L_{iakh} + \delta_k^t g^{ab} L_{ijak} + \\
 & + \delta_h^t g^{ab} L_{ijka} .
 \end{aligned} \tag{4.23}$$

Contrayendo $b=i$ y contrayendo luego con g_{ts} en (4.23) resulta que:

$$(m-2) L_{sjkh} + L_{jskh} + L_{kjsh} + L_{hjks} = \theta_{jkhs} \tag{4.24}$$

donde:

$$\begin{aligned}
 \theta_{jkhs} = & L_{ijkh}^i \psi_s - (L_{ijkh} \psi^i)^{,t} g_{ts} + g_{js} g^{ai} L_{iakh} + \\
 & + g_{ks} g^{ai} L_{ijah} + g_{hs} g^{ai} L_{ijka}
 \end{aligned} \tag{4.25}$$

y

$$(L_{ijkh} \psi^i)^{,t} = \frac{\partial}{\partial \psi_t} (L_{ijkh} \psi^i)$$

Análogamente, contrayendo $b=j$, $b=k$ y $b=h$ en (4.5) se obtiene:

$$(m-2) L_{iskh} + L_{sikh} + L_{iksh} + L_{ihks} = \zeta_{ikhs} \tag{4.26}$$

$$(m-2) L_{ijsh} + L_{sjih} + L_{isjh} + L_{ijhs} = \nu_{ijhs} \tag{4.27}$$

$$(m-2) L_{ijks} + L_{sjki} + L_{iskj} + L_{ijsk} = \pi_{ijks} \tag{4.28}$$

donde:

$$\begin{aligned}
 \zeta_{ikhs} = & L_{ijkh}^j \psi_s - (L_{ijkh} \psi^j)^{,t} g_{ts} + g_{is} g^{aj} L_{ajkh} + \\
 & + g_{ks} g^{aj} L_{ijah} + g_{hs} g^{aj} L_{ijka}
 \end{aligned} \tag{4.29}$$

$$\begin{aligned} \mu_{ijhs} = & L_{ijkh}^k \psi_s - (L_{ijkh} \psi^k)^{,t} g_{ts} + g_{is} g^{ak} L_{ajkh} + \\ & + g_{js} g^{ak} L_{iakh} + g_{hs} g^{ak} L_{ijka} \end{aligned} \quad (4.30)$$

$$\begin{aligned} \pi_{ijks} = & L_{ijkh}^h \psi_s - (L_{ijkh} \psi^h)^{,t} g_{ts} + g_{is} g^{ah} L_{ajkh} + \\ & + g_{js} g^{ah} L_{iakh} + g_{ks} g^{ah} L_{ijah} \end{aligned} \quad (4.31)$$

Es claro que en las expresiones de θ_{jkhs} , ζ_{ikhs} , μ_{ijhs} y π_{ijks} dadas por (4.25) y (4.29) a (4.31) sólo aparecen tensores concomitantes de g_{rs} y ψ_r 2 y 3-covariantes cuya forma general es ya conocida por los teoremas 4.3 y 4.4. Por lo tanto si pudiésemos despejar L_{ijkh} en función de θ, ζ, μ y π habremos obtenido la forma general de los tensores 3-covariantes concomitantes de g_{rs} y ψ_r .

Ahora bien, podemos escribir:

$$L_{sjkh} = S_{sjkh} + T_{sjkh} + Q_{sjkh} + A_{sjkh} \quad (4.32)$$

donde S, T, Q y A son tensores 4-covariantes concomitantes de g_{rs} y ψ_r satisfaciendo:

$$\begin{aligned} S_{sjkh} &= S_{jskh} = S_{sjhk} \\ T_{sjkh} &= T_{jskh} = -T_{sjhk} \\ Q_{sjkh} &= -Q_{jskh} = Q_{sjhk} \\ A_{sjkh} &= -A_{jskh} = -A_{sjhk} \end{aligned} \quad (4.33)$$

Es claro entonces que para determinar L_{sjkh} bastará determinar todos los tensores S, T, Q y A satisfaciendo (4.33). Es claro también que S, T, Q y A satisfacen ecuaciones análogas a (4.24) y (4.26) a (4.28).

Cambiando índices y haciendo (4.24) + (4.26) - (4.27) - (4.28) se obtiene:

$$2[L_{jskh} - L_{sjhk}] = \theta_{jkhs} + \zeta_{skhj} - \mu_{sjhk} - \pi_{sjkh}$$

de donde, usando (4.33) tenemos que:

$$T_{sjkh} = \frac{1}{4} [\theta_{jkhs}^{(T)} + \zeta_{skhj}^{(T)} - \mu_{sjhk}^{(T)} - \pi_{sjkh}^{(T)}] \quad (4.34)$$

y

$$Q_{sjkh} = \frac{1}{4} [-\theta_{jkhs}^{(Q)} - \zeta_{skhj}^{(Q)} + \mu_{sjhk}^{(Q)} + \pi_{sjkh}^{(Q)}] \quad (4.35)$$

donde (T) y (Q) significan reemplazar en (4.25) y (4.29) a (4.31) L por T y Q respectivamente. Por lo tanto (4.34) y (4.35) determinan T y Q totalmente.

Para determinar S reemplazamos L por S en (4.24) y tenemos en cuenta (4.33) para obtener:

$$(m-1) S_{sjkh} + S_{kjsh} + S_{hjks} = \theta_{jkhs}^{(S)} \quad (4.36)$$

y cambiando índices:

$$(m-1) S_{hjks} + S_{kjhs} + S_{sjkh} = \theta_{jksh}^{(S)}$$

y

$$(m-1) S_{kjsh} + S_{sjkh} + S_{hjks} = \theta_{jshk}^{(S)}$$

Sumando estas tres últimas ecuaciones y teniendo en cuenta (4.33) obtenemos:

$$\begin{aligned} (m+1) [S_{sjkh} + S_{hjks} + S_{kjsh}] &= \theta_{jkhs}^{(S)} + \theta_{jksh}^{(S)} + \\ &+ \theta_{jshk}^{(S)} \end{aligned} \quad (4.37)$$

de donde multiplicando (4.36) por $(m+1)$ y restándole (4.37) resulta para todo $m \neq 2$:

$$S_{sjkh} = \frac{1}{(m+1)(m-2)} [m \theta_{jkhs}(S) - \theta_{jksh}(S) - \theta_{jshk}(S)] \quad (4.38)$$

Para determinar A reemplazamos L por A en (4.24) y teniendo en cuenta (4.33) obtenemos:

$$(m-3) A_{sjkh} + A_{kjsh} + A_{hjks} = \theta_{jkhs}(A) \quad (4.39)$$

y cambiando índices:

$$(m-3) A_{kjsh} + A_{sjkh} + A_{hjks} = \theta_{jshk}(A)$$

y

$$(m-3) A_{hjks} + A_{kjsh} + A_{sjkh} = \theta_{jksh}(A).$$

Sumando estas tres últimas ecuaciones y usando (4.33) resulta:

$$\begin{aligned} (m-1) A_{sjkh} + (m-3) A_{kjsh} + (m-3) A_{hjks} &= \\ &= \theta_{jkhs}(A) + \theta_{jshk}(A) + \theta_{jksh}(A) \end{aligned} \quad (4.40)$$

de donde multiplicando (4.39) por $(m-3)$ y restándole (4.40) resulta para todo $m \neq 2$ y $m \neq 5$:

$$A_{sjkh} = \frac{1}{(m-2)(m-5)} [(m-4) \theta_{jkhs}(A) - \theta_{jshk}(A) - \theta_{jksh}(A)] \quad (4.41)$$

Supongamos ahora $m=5$ y definamos:

$$n^a = \frac{\varepsilon^{acbud} A_{cbud}}{\sqrt{g}} \quad (4.42)$$

donde ϵ^{acbud} es la densidad tensorial de Levi-Civita. Por la misma razón dada en el teorema anterior es claro que η^a es un vector cuya forma general es conocida por el teorema 4.2.

Es fácil ver, teniendo en cuenta que $m=5$, que:

$$\begin{aligned} \epsilon^{acbud} A_{cbud} \epsilon_{asjkh} = & A_{sjkh} - A_{sjhk} - A_{skjh} + A_{skhj} - \\ & - A_{shkj} + A_{shjk} - A_{jskh} + A_{jshk} + \\ & + A_{jksh} - A_{jkhs} + A_{jhks} - A_{jhsk} + \\ & + A_{ksjh} - A_{kshj} - A_{kjsh} + A_{kjhs} + \\ & + A_{khsj} - A_{khjs} - A_{hsjk} + A_{hskj} + \\ & + A_{hjks} - A_{hjks} + A_{hkjs} - A_{hksj} \end{aligned}$$

de donde teniendo en cuenta (4.33) y (4.42) resulta que:

$$\begin{aligned} 4[A_{sjkh} + A_{jksh} + A_{jhks}] + 4[A_{skhj} + A_{shjk} + A_{khsj}] = \\ = \sqrt{g} \eta^a \epsilon_{asjkh}. \end{aligned} \quad (4.43)$$

De (4.39) y (4.27) y el hecho que $m=5$ resultan:

$$2 A_{sjkh} + A_{kjsh} + A_{hjks} = \theta_{jkhs}(A) \quad (4.44)$$

y

$$2 A_{skhj} + A_{hksj} + A_{shkj} = \mu_{skjh}(A) \quad (4.45)$$

Pero por (4.33):

$$A_{sjkh} + A_{jksh} + A_{jhks} = 3 A_{sjkh} - [2 A_{sjkh} + A_{kjsh} + A_{hjks}]$$

y

$$A_{skhj} + A_{shjk} + A_{khsj} = 3 A_{skhj} - [2 A_{skhj} + A_{hksj} + A_{shkj}]$$

de donde por (4.44) y (4.45) resulta:

$$A_{sjkh} + A_{hksj} + A_{jhks} = 3 A_{sjkh} - \theta_{jkhs} (A) \quad (4.46)$$

y

$$A_{skhj} + A_{shjk} + A_{khsj} = 3 A_{skhj} - \mu_{skjh} (A) \quad (4.47)$$

Reemplazando (4.46) y (4.47) en (4.43) resulta:

$$A_{sjkh} + A_{skhj} = \frac{1}{12} [\sqrt{g} \eta^a \epsilon_{asjkh} + 4 \theta_{jkhs} (A) + 4 \mu_{skjh} (A)] .$$

Por último, cambiando índices en (4.45) y restándole esta última ecuación obtenemos, en el caso m=5:

$$A_{kjsh} = \frac{1}{2} [\mu_{kjhs} (A) - \frac{1}{12} [\sqrt{g} \eta^a \epsilon_{asjkh} + 4 \theta_{jkhs} (A) + 4 \mu_{skjh} (A)]] . \quad (4.48)$$

Supongamos ahora m=2.

Es facil ver, teniendo en cuenta (4.33) que para m=2:

$$A_{sjkh} = \phi g \epsilon_{sj} \epsilon_{kh} \quad (4.49)$$

donde ϕ es un escalar concomitante de g_{rs} y ψ_r y por lo tanto $\phi = \alpha(\rho)$ por el teorema 3.11. Para verificar (4.49) basta considerar $\phi = A_{1212}/g$ en cada sistema de coordenadas y probar que ϕ es un escalar concomitante de g_{rs} y ψ_r .

Por último nos queda por determinar S cuando m=2.

Cambiando índices en (4.24) y (4.27) y restándolas se obtiene:

$$L_{sjkh} - L_{khsj} = \theta_{jksh} - \mu_{khsj} \quad (4.50)$$

Podemos escribir:

$$S_{sjkh} = V_{sjkh} + W_{sjkh} \quad (4.51)$$

donde V y W son tensores 4-covariantes concomitantes de g_{rs} y ψ_r satisfaciendo:

$$V_{sjkh} = V_{jskh} = V_{sjhk} = V_{khsj} \quad (4.52)$$

y

$$W_{sjkh} = W_{jskh} = W_{sjhk} = -W_{khsj} \quad (4.53)$$

Es claro entonces que para determinar S en el caso $m=2$ bastará con determinar V y W satisfaciendo (4.52) y (4.53).

Por (4.50) y (4.53) resulta que para $\underline{m=2}$:

$$W_{sjkh} = \frac{1}{2} [\theta_{jksh}^{(W)} - \mu_{khsj}^{(W)}] \quad (4.54)$$

lo que determina W .

Para determinar V consideremos para $p \in M$ el subespacio H_p de $T_4^0(M_p)$ formado por los elementos:

$$C_{sjkh} (dx^s)_p \otimes (dx^j)_p \otimes (dx^k)_p \otimes (dx^h)_p \quad (4.55)$$

cuyas componentes C_{sjkh} satisfacen (4.52). Es fácil ver que existen únicamente 6 componentes independientes, a saber: C_{1111} , C_{1112} , C_{1122} , C_{1212} , C_{1222} y C_{2222} . Por lo tanto:

$$\dim H_p \leq 6 \quad (4.56)$$

Consideremos entonces $X_{(1)}, \dots, X_{(6)}$ los siguientes tensores 4-covariantes concomitantes de g_{rs} y ψ_r :

$$\begin{aligned}
X_{(1)sjkh} &= g_{sj} g_{kh} \\
X_{(2)sjkh} &= g_{sj} \psi_k \psi_h + g_{kh} \psi_s \psi_j \\
X_{(3)sjkh} &= \psi_s \psi_j \psi_k \psi_h \\
X_{(4)sjkh} &= g_{sk} g_{jh} + g_{jk} g_{sh} \\
X_{(5)sjkh} &= \sqrt{g} \psi^t [\epsilon_{ts} \psi_j \psi_k \psi_h + \epsilon_{tj} \psi_s \psi_k \psi_h + \\
&\quad + \epsilon_{tk} \psi_s \psi_j \psi_h + \epsilon_{th} \psi_s \psi_j \psi_k] \\
X_{(6)sjkh} &= \sqrt{g} \psi^t [\epsilon_{ts} \psi_j g_{kh} + \epsilon_{tj} \psi_s g_{kh} + \\
&\quad + \epsilon_{tk} \psi_h g_{sj} + \epsilon_{th} \psi_k g_{sj}]
\end{aligned} \tag{4.57}$$

Claramente $X_{(i)}(P) \in H_p \quad \forall 1 \leq i \leq 6$. Probaremos ahora que $\{X_{(i)}(P)\}_{i=1}^6$ es linealmente independiente. Sean $\lambda_i \in \mathbb{R} \quad (1 \leq i \leq 6)$ tales que $\sum_{i=1}^6 \lambda_i X_{(i)}(p) = 0$. Por lo tanto será:

$$\sum_{i=1}^6 \lambda_i X_{(i)sjkh}(p) = 0 \tag{4.58}$$

Para p dado consideremos un sistema de coordenadas tal que:

$$\psi_2(P) = 0, \quad g_{ij}(P) = \pm \delta_{ij} \tag{4.59}$$

y por lo tanto:

$$\psi^2(P) = 0, \quad \psi^1(P) = \pm \psi_1(P) \tag{4.60}$$

Teniendo en cuenta (4.57) y (4.58) para los índices $sjkh = 1111, 1112, 1122, 1222, 2222$ y 1212 y usando (4.59) y (4.60) se obtienen las siguientes 6 ecuaciones:

$$\lambda_1 \pm 2(\psi_1(P))^2 \lambda_2 + (\psi_1(P))^4 \lambda_3 + 2\lambda_4 = 0$$

$$\pm (\psi_1(P))^4 \lambda_5 + (\psi_1(P))^2 \lambda_6 = 0$$

$$\pm \lambda_1 \pm (\psi_1(P))^2 \lambda_2 = 0$$

$$\pm (\psi_1(P))^2 \lambda_6 = 0$$

$$\lambda_1 + 2\lambda_4 = 0$$

$$\lambda_4 = 0$$

Es fácil ver de aquí que $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_6 = 0$ y por lo tanto los $X_{(i)}(P)$ son linealmente independientes, de donde teniendo en cuenta (4.56) resulta:

$$\dim H_P = 6$$

y por lo tanto $\{X_{(i)}(P)\}_{i=1}^6$ es una base de H_P y entonces:

$$V_{sjkh} = \sum_{i=1}^6 \phi_i X_{(i)} s_{jkh} \quad (4.61)$$

donde, es fácil verlo, los ϕ_i son escalares concomitantes de g_{rs} y ψ_r ya conocidos por el teorema 3.11.

Teniendo en cuenta entonces (4.25), (4.29 /32), (4.34/5), (4.38), (4.41/2), (4.48/9), (4.51), (4.54), (4.61) y los teoremas 3.11 y 4.2/4 se obtiene lo afirmado.

Q.E.D.

5. EXPRESIONES DE EULER-LAGRANGE Y ECUACIONES DE CAMPO

Es bien conocido que muchas de las ecuaciones de campo de la física teórica pueden deducirse de la aplicación de un principio variacional a un Lagrangiano adecuadamente elegido. Más precisamente si ρ^A y λ^α son las componentes de dos objetos geométricos y si L es una función de las ρ^A y sus derivadas hasta el orden M y de λ^α y sus derivadas hasta el orden Q , es decir:

$$L = L(\rho^A; \rho^A_{,i_1}; \dots; \rho^A_{,i_1 \dots i_M}; \lambda^\alpha; \lambda^\alpha_{,i_1}; \dots; \lambda^\alpha_{,i_1 \dots i_Q}) \quad (5.1)$$

entonces la aplicación de un principio variacional a L , fijando λ^α , da como resultado las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$E_A(L) = 0 \quad (5.2)$$

donde:

$$E_A(L) = - \frac{\partial L}{\partial \rho^A} + \sum_{r=1}^M (-1)^{r+1} \frac{\partial^r}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_r}} \left(\frac{\partial L}{\partial \rho^A_{,i_1 \dots i_r}} \right) \quad (5.3)$$

y donde hemos empleado la convención de Einstein para la suma (cada i_ℓ va sumado de 1 a m).

Si en lugar de suponer que las λ^α están prefijadas suponemos que lo están las ρ^A y les aplicamos el mismo principio variacional, entonces obtenemos otro grupo de ecuaciones:

$$E_\alpha(L) = 0 \quad (5.4)$$

donde $E_\alpha(L)$ viene dado por una expresión análoga a (5.3) cambiando ρ^A por λ^α y M por Q .

Por un resultado de Lovelock [6] estas expresiones son operadores tensoriales de concomitancia.

5.1. EL TENSOR MOMENTO-ENERGIA Y LAS ECUACIONES DE EINSTEIN-MAXWELL

En la teoría de la relatividad general, la interacción del campo gravitacional (caracterizado por un tensor simétrico y no-singular g_{ij}) y el campo electromagnético sin fuentes (caracterizado por un tensor antisimétrico F_{ij}) se supone gobernado por las ecuaciones de campo de Einstein-Maxwell:

$$R^{ij} - \frac{1}{2} g^{ij} R = - \frac{1}{2} (F^{ik} F^j_k - \frac{1}{4} g^{ij} F^{rs} F_{rs}) \quad (5.5)$$

$$F^{ij}{}_{;j} = 0 \quad (5.6)$$

$$F_{ij;k} + F_{ki;j} + F_{jk;i} = 0 \quad (5.7)$$

donde $F^{ik} = g^{is} g^{kt} F_{st}$, $F^j_k = g^{ij} F_{ik}$, R la curvatura escalar, $R^{ij} = R^k_{thk} g^{ti} g^{hj}$ y donde la barra vertical indica derivada covariante.

Es conocido que estas ecuaciones pueden ser obtenidas mediante la aplicación de un principio variacional a partir de una elección adecuada de una densidad Lagrangiana L , introduciendo un campo vectorial ψ_i y un campo tensorial F_{ij} definido por:

$$F_{ij} = \psi_{i,j} - \psi_{j,i} \quad (5.8)$$

En efecto, sea

$$L_1 = \sqrt{g} R + \frac{1}{4} \sqrt{g} F^{ij} F_{ij} \quad (5.9)$$

donde F_{ij} esta dado por (5.8). Luego L_1 es una densidad Lagrangiana del tipo:

$$L = L(g_{ij}; g_{ij,h}; g_{ij,hk}; \psi_i; \psi_{i,j}) \quad (5.10)$$

En particular, por (5.2) y (5.4), las ecuaciones de Euler-

Lagrange correspondientes son:

$$E^{ij}(L) = 0 \quad (5.11)$$

y

$$E^i(L) = 0 \quad (5.12)$$

donde, por (5.3) y su análogo:

$$E^{ij}(L) = - \frac{\partial L}{\partial g_{ij}} + \frac{\partial}{\partial x^h} \left(\frac{\partial L}{\partial g_{ij,h}} \right) - \frac{\partial^2}{\partial x^h \partial x^k} \left(\frac{\partial L}{\partial g_{ij,hk}} \right) \quad (5.13)$$

y

$$E^i(L) = - \frac{\partial L}{\partial \psi_i} + \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\frac{\partial L}{\partial \psi_{i,j}} \right) \quad (5.14)$$

En particular para el Lagrangiano L_1 dado por (5.9) es conocido que (5.11) se reduce a (5.5), (5.12) a (5.6), mientras que (5.7) es una consecuencia inmediata de la definición (5.8).

Ahora bien, la densidad Lagrangiana L_1 dada por (5.9) es del tipo:

$$L = \sqrt{g} \quad R + \tilde{L} \quad (5.15)$$

donde

$$\tilde{L} = \tilde{L}(g_{ij}; \psi_i; \psi_{i,j}) \quad (5.16)$$

Lovelock [7] ha encontrado todas las densidades Lagrangianas del tipo (5.15) tales que (5.12) se reduce a (5.6) y ha mostrado que ellas tienen esencialmente el mismo tensor momento-energía que el del Lagrangiano L_1 dado por (5.9) (o sea, también (5.11) se reduce a (5.5)).

Las densidades Lagrangianas L del tipo (5.15) (donde \tilde{L} es del tipo (5.16)) se dice que satisfacen el "Principio de mínimo acoplamiento gravitacional" (MGC). Si suponemos además que L es "gauge invariant" (invariante por medidas) es conocido [3] que \tilde{L} ((5.16))

es del tipo:

$$\tilde{L} = \tilde{L}(g_{ij}; F_{ij}) \quad (5.17)$$

El mismo Lovelock [8] ha probado también una especie de recíproca de lo anterior "Si L es una densidad Lagrangiana del tipo (5.15) (con \tilde{L} del tipo (5.17)) tal que (5.11) se reduce a (5.5) entonces también (5.12) se reduce a (5.6)".

Daremos aquí una demostración más sencilla de este último resultado basándonos en el hecho que por el teorema 3.9 de la Sección 3 conocemos la forma general de los escalares del tipo (5.17).

Sea L una densidad Lagrangiana gauge invariant verificando el principio de mínimo acoplamiento gravitacional (MGC). Luego L es del tipo (5.15) con \tilde{L} una densidad Lagrangiana del tipo (5.17).

Sea V el abierto del espacio $2m^2$ -dimensional dado por g_{ij} y F_{ij} definido por la condición $\det F_{ij} \neq 0$.

Como \tilde{L} es una densidad Lagrangiana del tipo (5.17) resulta que \tilde{L}/\sqrt{g} es un escalar del mismo tipo, y por el teorema 3.9 sabemos que, si nos restringimos al abierto V , existe una función $f \in C^\infty$ tal que:

$$\frac{\tilde{L}}{\sqrt{g}} = f(\phi, \psi)$$

y por lo tanto

$$\tilde{L} = \sqrt{g} f(\phi, \psi) \quad (5.18)$$

donde

$$\phi = \det(F_{ij} g^{jk}) \quad (5.19)$$

$$\psi = F^{ij} F_{ij} \quad (5.20)$$

Por lo tanto de (5.15) con (5.17) y (5.18) resulta que:

$$L = \sqrt{g} R + \sqrt{g} f(\phi, \psi) \quad (5.21)$$

Como queremos determinar L de forma tal que (5.11) se reduzca a (5.5) una tal L debe verificar la ecuación:

$$E^{ij}(L) = \sqrt{g} (R^{ij} - \frac{1}{2} g^{ij} R + \frac{1}{2} F^{ik} F^j_k - \frac{1}{8} g^{ij} F^{rs} F_{rs}) \quad (5.22)$$

Pero, como es conocido:

$$E^{ij}(\sqrt{g} R) = \sqrt{g} (R^{ij} - \frac{1}{2} g^{ij} R)$$

entonces, por (5.21) y el hecho que $E^{ij}(L) = E^{ij}(\sqrt{g} R) + E^{ij}(\sqrt{g} f(\phi, \psi))$, (5.22) se reduce a:

$$E^{ij}(\sqrt{g} f(\phi, \psi)) = \sqrt{g} \left(\frac{1}{2} F^{ik} F^j_k - \frac{1}{8} g^{ij} F^{rs} F_{rs} \right) \quad (5.23)$$

Puede verse de (5.19) y (5.20) que $\sqrt{g} f(\phi, \psi)$ no depende de las primeras y segundas derivadas de g_{ij} , por lo tanto de (5.13) y (5.23) resulta que:

$$\frac{\partial}{\partial g_{ij}} (\sqrt{g} f(\phi, \psi)) = \sqrt{g} \left(-\frac{1}{2} F^{ik} F^j_k + \frac{1}{8} g^{ij} F^{rs} F_{rs} \right) \quad (5.24)$$

Ahora bien:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial g_{ij}} (\sqrt{g} f(\phi, \psi)) &= \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial g_{ij}} f(\phi, \psi) + \sqrt{g} D_1 f(\phi, \psi) \frac{\partial \phi}{\partial g_{ij}} + \\ &+ \sqrt{g} D_2 f(\phi, \psi) \frac{\partial \psi}{\partial g_{ij}} \end{aligned} \quad (5.25)$$

donde $D_1 f$ y $D_2 f$ indican las derivadas parciales de f respecto de sus variables. Del hecho que $\partial g / \partial g_{ij} = g g^{ij}$ resulta:

$$\frac{\partial \sqrt{g}}{\partial g_{ij}} = \frac{1}{2} \sqrt{g} g^{ij} \quad (5.26)$$

Por otra parte de (5.19) podemos observar que $\phi = \det(F_{rs})/g$

de donde:

$$\frac{\partial \phi}{\partial g_{ij}} = -\phi g^{ij} \quad (5.27)$$

Para calcular $\partial \psi / \partial g_{ij}$ observemos de (5.20) que $\psi = g^{rh} g^{sk} F_{hk} F_{rs}$ y por lo tanto:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial g_{ij}} &= \frac{\partial g^{rh}}{\partial g_{ij}} g^{sk} F_{hk} F_{rs} + \frac{\partial g^{sk}}{\partial g_{ij}} g^{rh} F_{hk} F_{rs} = (\text{cambiando índices}) \\ &= \frac{\partial g^{rh}}{\partial g_{ij}} g^{sk} F_{hk} F_{rs} + \frac{\partial g^{rh}}{\partial g_{ij}} g^{sk} F_{kh} F_{sr} = \\ &= 2 \frac{\partial g^{rh}}{\partial g_{ij}} g^{sk} F_{hk} F_{rs} = 2 \left(-\frac{1}{2} (g^{ri} g^{hj} + g^{rj} g^{hi}) g^{sk} F_{hk} F_{rs} \right) = \\ &= -g^{ri} g^{hj} g^{sk} F_{hk} F_{rs} - g^{rj} g^{hi} g^{sk} F_{hk} F_{rs} = (\text{cambiando índices}) \\ &= -2 g^{hi} g^{rj} g^{ks} F_{hk} F_{rs} = -2 F^{is} F^j_s \end{aligned} \quad (5.28)$$

Reemplazando entonces (5.26), (5.27) y (5.28) en (5.25) resulta que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial g_{ij}} (\sqrt{g} f(\phi, \psi)) &= \frac{1}{2} \sqrt{g} g^{ij} f(\phi, \psi) - \sqrt{g} D_1 f(\phi, \psi) \phi g^{ij} - \\ &\quad - \sqrt{g} D_2 f(\phi, \psi) 2 F^{is} F^j_s \end{aligned} \quad (5.29)$$

De (5.24) y (5.29) resulta que:

$$\begin{aligned} (f(\phi, \psi)) - 2 D_1 f(\phi, \psi) \phi - \frac{1}{4} F^{rs} F_{rs} g^{ij} + \\ + (1-4 D_2 f(\phi, \psi)) F^{is} F^j_s = 0 \end{aligned} \quad (5.30)$$

Ahora bien, como estamos restringidos al abierto V , para cada punto fijo de la variedad 4-dimensional espacio-tiempo sabemos que

existe un sistema de coordenadas tal que, en el punto:

$$(g_{ij} + F_{ij}) = \begin{vmatrix} -1 & \alpha & 0 & 0 \\ -\alpha & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \beta \\ 0 & 0 & -\beta & 1 \end{vmatrix} \quad (5.31)$$

Vamos a probar, usando este sistema de coordenadas especial, que los tensores g^{ij} y $F^{is} F^j_s$ son linealmente independientes en V . Supongamos que:

$$\lambda g^{ij} + \mu F^{is} F^j_s = 0.$$

Luego, en el punto considerado

$$\lambda g^{ij} + \mu g^{ih} g^{sk} g^{jt} F_{hk} F_{ts} = 0$$

considerando el sistema de coordenadas donde vale (5.31) y tomando $i=j=1$ primero e $i=j=4$ después tenemos que:

$$\begin{aligned} \lambda + \mu \alpha^2 &= 0 \\ \text{y} \\ \lambda - \mu \beta^2 &= 0 \end{aligned}$$

de donde $\mu(\alpha^2 + \beta^2) = 0$. Pero como estamos restringidos al abierto V resulta $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$, por lo tanto será $\lambda = \mu = 0$, lo que prueba la independencia lineal de los tensores. Resulta entonces de (5.30) que:

$$D_2 f(\phi, \psi) = \frac{1}{4} \quad (5.32)$$

$$\text{y} \quad f(\phi, \psi) - 2 D_1 f(\phi, \psi) \cdot \phi - \frac{1}{4} \psi = 0 \quad (5.33)$$

De (5.32) resulta que existe h dependiendo solo de ϕ tal que:

$$f(\phi, \psi) = \frac{1}{4} \psi + h(\phi) \quad (5.34)$$

de donde reemplazando (5.34) en (5.33) obtenemos que h satisface la siguiente ecuación diferencial:

$$h(\phi) - 2 h'(\phi) \cdot \phi = 0$$

entonces resulta, para una cierta constante C , que:

$$h(\phi) = C \sqrt{\phi}$$

de donde por (5.34):

$$f(\phi, \psi) = \frac{1}{4} \psi + C \sqrt{\phi} \quad (5.35)$$

Reemplazando por último (5.35) en (5.21) resulta que:

$$L = \sqrt{g} \left(R + \frac{1}{4} \psi + C \sqrt{\phi} \right) \quad (5.36)$$

o también:

$$L = L_1 + C \sqrt{g} \sqrt{\phi} \quad (5.37)$$

Ahora bien, la igualdad (5.36) (ó (5.37)) es válida en V .

Pero V es un abierto denso y por lo tanto por continuidad (ambos miembros de la igualdad son C^∞) resulta que (5.36) (y (5.37)) es válida en todo el espacio.

Hemos demostrado entonces el siguiente teorema:

5.1. Teorema

Si L es una densidad Lagrangiana en el espacio- tiempo concomitante del tensor métrico y de un covector y sus primeras derivadas y si L es gauge invariant, satisface el principio de mínimo acoplamiento gravitacional (MGC) y verifica (5.22), entonces L es de la forma:

$$L = \sqrt{g} \left(R + \frac{1}{4} \psi + C \sqrt{\phi} \right)$$

donde C es una constante, y donde ϕ y ψ están dadas por (5.19) y (5.20) respectivamente. ///.

Estudiaremos ahora las ecuaciones de Euler-Lagrange (5.14) correspondientes a una densidad Lagrangiana L de la forma (5.36). Para ello observemos que de (5.19):

$$\sqrt{F} = \sqrt{g} \sqrt{\phi} \quad (5.38)$$

donde $F = \det(F_{ij})$. Afirmamos que:

$$\sqrt{F} = \left| \frac{1}{8} \epsilon^{ijrs} F_{ij} F_{rs} \right| \quad (5.39)$$

En efecto: Si $F \neq 0$ para cada punto fijo del espacio-tiempo existe un sistema de coordenadas tal que, en el punto, se verifica (5.31). Por lo tanto es facil ver, usando ese sistema de coordenadas, que en el punto:

$$\epsilon^{ijrs} F_{ij} F_{rs} = 8 \alpha \beta \quad (5.40)$$

y que:

$$F = \alpha^2 \beta^2 \quad (5.41)$$

Juntando (5.40) y (5.41) se concluye (5.39) en el caso $F \neq 0$. Ahora bien si $F=0$ se sabe también que dado un punto existe un sistema de coordenadas tal que, en el punto:

$$(g_{ij} + F_{ij}) = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \gamma & \pm\gamma \\ 0 & -\gamma & -1 & 0 \\ 0 & \mp\gamma & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

de donde es facil ver que, en el punto:

$$\epsilon^{ijrs} F_{ij} F_{rs} = 0 \quad (5.42)$$

y por lo tanto (como $F=0$) también se verifica (5.39).

De (5.39) concluimos que localmente:

$$\sqrt{F} = \frac{1}{8} \epsilon^{ijrs} F_{ij} F_{rs} \quad \text{o} \quad \sqrt{F} = -\frac{1}{8} \epsilon^{ijrs} F_{ij} F_{rs} \quad (5.43)$$

Pero:

$$\epsilon^{ijst} /_j = 0 \quad (5.44)$$

$$\epsilon^{ijst} \psi_{i/j} F_{st} = \frac{1}{2} \epsilon^{ijst} (\psi_{i/j} - \psi_{j/i}) F_{st} = \quad (5.8)$$

$$= \frac{1}{2} \epsilon^{ijst} F_{ij} F_{st} \quad (5.45)$$

y

$$\begin{aligned} \epsilon^{ijst} \psi_i F_{st/j} &= \frac{1}{3} (\epsilon^{ijst} \psi_i F_{st/j} + \\ &\quad + \epsilon^{istj} \psi_i F_{tj/s} + \epsilon^{itjs} \psi_i F_{js/t}) = \\ &= \frac{1}{3} \epsilon^{ijst} \psi_i (F_{st/j} + F_{tj/s} + F_{js/t}) = 0 \quad (5.46) \end{aligned}$$

esto último por (5.7) que es consecuencia inmediata de (5.8).

Por lo tanto juntando (5.44), (5.45) y (5.46) resulta que:

$$\epsilon^{ijrs} F_{ij} F_{rs} = 2(\epsilon^{ijrs} \psi_i F_{rs}) /_j$$

o sea $\epsilon^{ijrs} F_{ij} F_{rs}$ es una divergencia, de donde por (5.43) localmente \sqrt{F} es una divergencia y por lo tanto, como ya es conocido:

$$E^1(\sqrt{F}) = 0 \quad (5.47)$$

Luego resulta que si L es una densidad Lagrangiana de la forma (5.36) entonces por (5.38) y (5.47):

$$E^1(L) = E^1(\sqrt{g} (R + \frac{1}{4} \psi)) + C E^1(\sqrt{g} \sqrt{\phi}) = E^1(L_1) \quad (5.48)$$

donde L_1 es la densidad Lagrangiana definida en (5.9). Concluimos entonces el siguiente Teorema:

5.2. Teorema

Si L es una densidad Lagrangiana en el espacio-tiempo, concomitante del tensor métrico y de un covector y sus primeras derivadas y si L es gauge invariant, satisface el principio de mínimo acoplamiento gravitacional (MGC) y verifica (5.22), entonces L verifica también que:

$$E^i(L) = F^{ij}/j$$

Es decir, la elección usual del tensor momento-energía implica las ecuaciones de Maxwell.

5.II. EL TENSOR MOMENTO-ENERGIA Y LA ECUACION DE KLEIN-GORDON

Es sabido [16] que, en la física teórica, la ecuación que describe el campo escalar de partículas sin cargas de masa K y spin cero, y que es la contraparte relativista de la ecuación de Schrödinger, es la ecuación de Klein-Gordon:

$$g^{ij} \phi_{,ij} = K^2 \phi \quad (5.49)$$

donde ϕ es un campo escalar y K una constante.

Es conocido que esta ecuación puede obtenerse mediante la aplicación de un principio variacional a partir de una elección adecuada de una densidad Lagrangiana. En efecto, sea

$$L_2 = \frac{1}{2} \sqrt{g} (g^{ij} \phi_{,i} \phi_{,j} + K^2 \phi^2) \quad (5.50)$$

luego L_2 es una densidad Lagrangiana del tipo:

$$L = L(\phi; \phi_{,i}; g_{ij}) \quad (5.51)$$

Los operadores de Euler-Lagrange asociados a un L de este tipo son:

$$E(L) = - \frac{\partial L}{\partial \phi} + \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial L}{\partial \phi_{,i}} \right) \quad (5.52)$$

y

$$E^{ij}(L) = - \frac{\partial L}{\partial g_{ij}} \quad (5.53)$$

y las ecuaciones de Euler-Lagrange correspondientes son:

$$E(L) = 0 \quad \text{y} \quad E^{ij}(L) = 0 \quad (5.54)$$

Es conocido, y fácil de ver, que para el Lagrangiano L_2 dado por (5.50) resulta:

$$E(L_2) = \sqrt{g}(g^{ij} \phi_{,ij} - K^2 \phi) \quad (5.55)$$

y

$$E^{ij}(L_2) = \frac{1}{2} \sqrt{g} \left(- \frac{1}{2} g^{ij} g^{rs} \phi_{,r} \phi_{,s} + g^{ir} g^{js} \phi_{,r} \phi_{,s} - \frac{1}{2} g^{ij} K^2 \phi^2 \right) \quad (5.56)$$

por lo tanto la elección de L_2 y la aplicación del principio variacional nos determina la ecuación de Klein-Gordon, y el segundo miembro de (5.56) puede considerarse como el correspondiente tensor Momento-Energía.

Ahora bien, Noriega [10] ha encontrado todas las densidades Lagrangianas L del tipo (5.51) tales que:

$$E(L) = \sqrt{g}(g^{ij} \phi_{,ij} - K^2 \phi) \quad (5.57)$$

determinando que ellas son de la forma:

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} \sqrt{g}(g^{ij} \phi_{,i} \phi_{,j} + K^2 \phi^2) + \frac{1}{2} \sqrt{g} a = \\ &= L_2 + \frac{1}{2} \sqrt{g} a \end{aligned} \quad (5.58)$$

con a constante.

Es fácil ver que éstos Lagrangianos verifican que:

$$E^{ij}(L) = E^{ij}(L_2) - \frac{1}{4} \sqrt{g} g^{ij} a \quad (5.59)$$

Demostraremos aquí una especie de recíproca. Vamos a encontrar todos los Lagrangianos L de la forma (5.51) que verifiquen (5.59).

Sea L un Lagrangiano de la forma (5.51). Por el teorema 3.7 existe una función $C^\infty f$ tal que L es de la forma:

$$L = \sqrt{g} f(\phi, \psi) \quad (5.60)$$

donde

$$\psi = g^{rs} \phi_{,r} \phi_{,s}$$

Como queremos encontrar los L que verifiquen (5.59) se debe verificar entonces la ecuación:

$$\begin{aligned} E^{ij}(\sqrt{g} f(\phi, \psi)) &= \frac{1}{2} \sqrt{g} \left(-\frac{1}{2} g^{ij} g^{rs} \phi_{,r} \phi_{,s} + g^{ir} g^{js} \phi_{,r} \phi_{,s} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} g^{ij} K^2 \phi^2 \right) - \frac{1}{4} \sqrt{g} g^{ij} a \end{aligned} \quad (5.61)$$

Ahora bien, por (5.53) será:

$$E^{ij}(\sqrt{g} f(\phi, \psi)) = -\frac{1}{2} \sqrt{g} g^{ij} f(\phi, \psi) - \sqrt{g} D_2 f(\phi, \psi) \frac{\partial \psi}{\partial g_{ij}} =$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2} \sqrt{g} g^{ij} f(\phi, \psi) - \sqrt{g} D_2 f(\phi, \psi) \left(-\frac{1}{2} (g^{ri} g^{sj} + g^{si} g^{rj}) \phi_{,r} \phi_{,s} \right) = \\
&= -\frac{1}{2} \sqrt{g} g^{ij} f(\phi, \psi) + \sqrt{g} D_2 f(\phi, \psi) g^{ri} g^{sj} \phi_{,r} \phi_{,s}
\end{aligned}$$

donde $D_2 f$ indica la derivada parcial de f respecto de su segunda variable. Reemplazando en (5.61) obtenemos que:

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{2} g^{ij} f(\phi, \psi) + D_2 f(\phi, \psi) g^{ri} g^{sj} \phi_{,r} \phi_{,s} = \\
&= -\frac{1}{4} g^{ij} g^{rs} \phi_{,r} \phi_{,s} + \frac{1}{2} g^{ir} g^{js} \phi_{,r} \phi_{,s} - \frac{1}{4} g^{ij} K^2 \phi^2 - \frac{1}{4} g^{ij} a
\end{aligned}$$

de donde será:

$$\begin{aligned}
&g^{ij} \left(\frac{1}{2} f(\phi, \psi) - \frac{1}{4} \psi - \frac{1}{4} K^2 \phi^2 - \frac{1}{4} a \right) + \\
&+ g^{ir} g^{js} \phi_{,r} \phi_{,s} \left(\frac{1}{2} - D_2 f(\phi, \psi) \right) = 0
\end{aligned}$$

Ahora bien, si $(\phi_1, \dots, \phi_m) = 0$ entonces resulta que

$$g^{ij} \left(\frac{1}{2} f(\phi, \psi) - \frac{1}{4} \psi - \frac{1}{4} K^2 \phi^2 - \frac{1}{4} a \right) = 0 \quad (5.62)$$

Si en cambio consideramos el abierto V del espacio m^2+m+1 dimensional dado por g_{ij} y ϕ_i definido por la condición $(\phi_1, \dots, \phi_m) \neq 0$ vamos a probar que los tensores g^{ij} y $g^{ir} g^{js} \phi_{,r} \phi_{,s}$ son linealmente independientes en V . En efecto:

Dado un punto de la variedad sabemos que existe un sistema de coordenadas tal que en el punto:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} -1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & -1 & \\ & & & 1 \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \phi_{,i} = \begin{pmatrix} d \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

con $d \neq 0$. Por lo tanto será:

$$g^{ij} = \begin{pmatrix} -1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & -1 & \\ & & & 1 \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Resulta entonces, usando este sistema de coordenadas, en el punto:

$$g^{ir} g^{js} \phi_{,r} \phi_{,s} = g^{i1} g^{j1} d^2 = \begin{cases} d^2 & \text{si } i=j=1 \\ 0 & \text{si } i \neq 1 \text{ ó } j \neq 1 \end{cases}$$

Por lo tanto si

$$\begin{aligned} \lambda g^{ij} + \mu g^{ir} g^{js} \phi_{,r} \phi_{,s} &= 0 \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \lambda g^{ij} + \mu g^{i1} g^{j1} d^2 &= 0 \end{aligned}$$

Tomando $i=j=2$ primero e $i=j=1$ después resulta $\lambda = \mu = 0$ y por lo tanto g^{ij} y $g^{ir} g^{js} \phi_{,r} \phi_{,s}$ son linealmente independientes en V . En particular es válido (5.62), de donde:

$$f(\phi, \psi) = \frac{1}{2} (\psi + K^2 \phi^2 + a) \quad (5.63)$$

(y claramente $D_2 f(\phi, \psi) = \frac{1}{2}$)

Reemplazando entonces en (5.60) será:

$$L = \frac{1}{2} \sqrt{g} (\psi + K^2 \phi^2 + a) = L_2 + \frac{1}{2} \sqrt{g} a \quad (5.64)$$

que es exactamente de la forma (5.58) y por lo tanto verifican (5.57). Hemos demostrado entonces el siguiente teorema:

5.3. Teorema

Si L es una densidad Lagrangiana concomitante del tensor métrico g_{ij} y de un escalar ϕ y sus primeras derivadas, o sea $L = L(g_{ij}; \phi; \phi_{,i})$, y L satisface (5.59), entonces L es de la forma:

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} \sqrt{g} (g^{ij} \phi_{,i} \phi_{,j} + K^2 \phi^2) + \frac{1}{2} \sqrt{g} a = \\ &= L_2 + \frac{1}{2} \sqrt{g} a. \end{aligned}$$

siendo L_2 el Lagrangiano dado por (5.50).

Además L verifica que:

$$E(L) = \sqrt{g} (g^{ij} \phi_{,ij} - K^2 \phi)$$

Es decir, la elección de un tensor Momento-Energía como el segundo miembro de (5.59) determina la ecuación de Klein-Gordon.

5.4. Corolario

El único Lagrangiano del tipo (5.51) que mediante la aplicación de un principio variacional determina la elección de un tensor Momento-Energía como el segundo miembro de (5.56) es el Lagrangiano:

$$L_2 = \frac{1}{2} \sqrt{g} (g^{ij} \phi_{,i} \phi_{,j} + K^2 \phi^2)$$

6. APENDICE I : K-JETS

6.1. Introducción

Sean M y P variedades diferenciables de dimensiones m y $m+n$ respectivamente, y sea $\pi: P \rightarrow M$ una submersión suryectiva (o sea, una aplicación C^∞ suryectiva tal que su diferencial $\pi_{*p}: P_p \rightarrow M_{\pi(p)}$ es epimorfismo $\forall p \in P$).

Por ser $\text{rg } \pi = m$ ($= \dim \text{Im}(\pi_*)$) se puede aplicar forma local normal y, por lo tanto, en coordenadas es:

$$\pi(a^1, \dots, a^{m+n}) = (a^1, \dots, a^m),$$

o sea, π es la proyección a las primeras m coordenadas (en coordenadas)

Para cada $x \in M$, $\pi^{-1}(x)$ es una subvariedad sumergida de P (no vacía, por ser π suryectiva) de dimensión n llamada *fibra en x* .

Una *sección local de π* es una aplicación $s: U \rightarrow P$, donde U es un abierto de M , tal que $\pi \circ s = \text{id}$.

Dado W abierto de M , notaremos con $\Gamma(W, P)$ al conjunto de todas las secciones locales C^∞ de π con dominio W , o sea:

$$\Gamma(W, P) = \{s: W \rightarrow P / s \text{ es sección } C^\infty \text{ de } \pi\}$$

6.2. Proposición

π es abierta.

Dem.:

Sea W abierto de P . Veamos que $\pi(W)$ es abierto en M . Sea $q = \pi(p) \in \pi(W)$,

\therefore existen (x, U) carta de M alrededor de $q = \pi(p)$ e (y, V) carta de P alrededor de p con $V \subset W$ tales que $\pi(V) \subset U$ y $x \circ \pi \circ y^{-1}(a^1, \dots, a^{m+n}) = (a^1, \dots, a^m)$

Luego, $x \circ \pi \circ y^{-1}: y(V) \rightarrow x(U)$ es una aplicación abierta, por lo tanto como $\pi(V) = x^{-1}((x \circ \pi \circ y^{-1})(y(V)))$ resulta que $\pi(V)$ es abierto en U y por lo tanto abierto en M . De esto último y del hecho que $q = \pi(p) \in \pi(V) \subset \pi(W)$, hemos encontrado un abierto $\pi(V)$ de M contenido en $\pi(W)$ alrededor de q . De aquí resulta lo afirmado. ///.

6.3. Definición

Sea $k \in \mathbb{N}_0$.

Dos secciones locales C^∞ de π , $s_1 \in \Gamma(U_1, P)$ y $s_2 \in \Gamma(U_2, P)$ se dirá que están (para $x_0 \in U_1 \cap U_2$) k, x_0 -relacionadas, y se lo notará $s_1 \underset{k, x_0}{\sim} s_2$, sii:

$$i) \quad s_1(x_0) = s_2(x_0)$$

ii) existen cartas (x, U) de M alrededor de x_0 e (y, V) de P alrededor de $s_1(x_0) (= s_2(x_0))$ tales que:

$$\left(\frac{\partial |\alpha| y^i s_1}{\partial x^\alpha} \right)_{x_0} = \left(\frac{\partial |\alpha| y^i s_2}{\partial x^\alpha} \right)_{x_0}$$

$$\forall 1 \leq i \leq m+n, \quad \forall \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \quad / |\alpha| = \sum_{j=1}^m \alpha_j \leq k$$

6.4. Observaciones

1. La notación usada en ii) de 6.3. significa:

$$\left(\frac{\partial |\alpha| y^i o s_1}{\partial x^\alpha} \right)_{x_0} = \left(\frac{\partial |\alpha| y^i o s_1}{\partial (x^1)^{\alpha_1} \dots \partial (x^m)^{\alpha_m}} \right)_{x_0} =$$

$$= \underbrace{D_1 o \dots o D_1}_{\alpha_1} o \underbrace{D_2 o \dots o D_2}_{\alpha_2} o \dots o \underbrace{D_m o \dots o D_m}_{\alpha_m} (y^i o s_1 o x^{-1})(x(x_0))$$

2. La igualdad en ii) de 6.3 se debe verificar en el punto x_0 ; luego para que tenga sentido $y^i o s_j o x^{-1}$, $j=1,2$, debería ser $U \subset U_1 \cap U_2$ y $s_j(U) \subset V$, $j=1,2$. Como sólo importa el punto x_0 bastará con restringir la carta (x,U) de la siguiente forma:

$$(x/U \cap s_1^{-1}(V) \cap s_2^{-1}(V), U \cap s_1^{-1}(V) \cap s_2^{-1}(V))$$

3. Es claro que $\widetilde{k, x_0}$ define una relación de equivalencia sobre las secciones locales C^∞ de π definidas en un entorno de x_0 .
4. En otras palabras: $s_1 \widetilde{k, x_0} s_2$ sii, en coordenadas, las derivadas parciales hasta el orden k de s_1 y s_2 coinciden en x_0 .
5. La condición ii) de 6.3 no depende de las cartas locales elegidas.

6.5. Definición

Para cada $k \in \mathbb{N}_0$ y cada $x \in M$ definimos:

$$p^k(x) = \{s \in \Gamma(W, P) : W \text{ es entorno abierto de } x \text{ en } M\} / \widetilde{k, x}$$

$$Y \quad p^k = \bigcup_{x \in M} p^k(x)$$

6.6. Proposición

$$P^k(x_1) \cap P^k(x_2) = \emptyset \quad \forall \quad x_1 \neq x_2 ; \quad x_1, x_2 \in M.$$

Dem.:

Supongamos que existe $y \in P^k(x_1) \cap P^k(x_2) \Rightarrow$
6.5

\Rightarrow existen $s_i \in \Gamma(U_i, P)$, $i=1,2$, tales que:

$$y = \overline{s_1}^{k, x_1} = \overline{s_2}^{k, x_2} \quad (x_i \in U_i, i=1,2)$$

Sea V un entorno abierto de x_1 en M tal que $x_2 \notin V$ (M es T_1)

Sea $U = U_1 \cap V$ y sea $s = s_1|_U$

luego, claramente es $\overline{s}^{k, x_1} = \overline{s_1}^{k, x_1} = \overline{s_2}^{k, x_2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow s \in \overline{s_2}^{k, x_2} \Rightarrow s \in P^k(x_2) \Rightarrow x_2 \in U \Rightarrow$$

6.5

$\Rightarrow x_2 \in V$, Absurdo. ///.

6.7. Definición

Definimos la proyección $\pi^k: P^k \rightarrow M$ de la manera natural:

$$\pi^k(y) = x \quad \text{sii} \quad y \in P^k(x)$$

6.8. Observaciones

1. La proyección π^k está bien definida gracias a 6.6.
2. $P^k(x) = (\pi^k)^{-1}(x) \quad \forall x \in M$

6.9. Definición

Para cada $s \in \Gamma(U, P)$ y cada $k \in N_0$ se define el k -jet de s a la aplicación:

$j^k(s): U \rightarrow P^k$ dada por:

$$j^k(s)(x) = \frac{1}{s} \cdot k, x$$

6.10. Observaciones

1. $\pi^k \circ j^k(s) = \text{id}_U$, por lo tanto $j^k(s)$ es una sección local de π^k
2. Luego veremos que P^k tiene una estructura de variedad diferenciable con la cual $j^k(s)$ resultará ser C^∞ (o sea, $j^k(s) \in \Gamma(U, P^k)$)
3. $P^k = \{j^k(s)(x) : s \in \Gamma(W, P) \text{ con } W \text{ abierto de } M\}$

6.11. Definición

Para k y $\ell \in \mathbb{N}_0$ con $k \geq \ell$ se define la *proyección canónica* de los k -jets sobre los ℓ -jets como la aplicación:

$$\pi_\ell^k : P^k \rightarrow P^\ell \quad \text{dada por:}$$

$$\pi_\ell^k(j^k(s)(x)) = j^\ell(s)(x)$$

Su buena definición es clara gracias a 3. de 6.10 y 6.6.

6.12. Proposición

$$P^0 \simeq P$$

Dem.:

Sea $f: P^0 \rightarrow P$ dada por:

$$f(j^0(s)(x)) = s(x)$$

Claramente f está bien definida

Veamos que f es una biyección.

(1) f es inyectiva:

En efecto, sean $s_i \in \Gamma(U_i, P)$ y $x_i \in U_i$, $i = 1, 2$ tales que

$$f(j^\circ(s_1)(x_1)) = f(j^\circ(s_2)(x_2)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s_1(x_1) = s_2(x_2) \quad \Rightarrow_{6.1} x_1 = \pi \circ s_1(x_1) = \pi \circ s_2(x_2) = x_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2 \quad . \quad /.$$

(2) f es suryectiva:

En efecto, sea $p \in P$.

Por ser π submersión, usando forma local normal, resulta que existen cartas (x, U) de M alrededor de $\pi(p)$ e (y, V) de P alrededor de p con $\pi(V) \subset U$ tales que:

$$(*) \quad x \circ \pi \circ y^{-1}(a^1, \dots, a^{m+n}) = (a^1, \dots, a^m), \quad \forall (a^1, \dots, a^{m+n}) \in y(V)$$

$$\text{Notemos } y(p) = (b^1, \dots, b^m, \dots, b^{m+n}).$$

Sea $i: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m+n}$ dada por

$$i(c^1, \dots, c^m) = (c^1, \dots, c^m, b^{m+1}, \dots, b^{m+n}).$$

Por ser $y(V)$ abierto de \mathbb{R}^{m+n} existe $\epsilon > 0$ y V_ϵ entorno abierto alrededor de $y(p)$ dado por $V_\epsilon = \prod_{j=1}^{m+n} (y^j(p) - \epsilon, y^j(p) + \epsilon)$ tal que $V_\epsilon \subset y(V)$.

Sea $\tilde{V} = y^{-1}(V_\epsilon)$ y sea $\tilde{U} = \pi(\tilde{V})$. Luego por ser π abierta

(6.2) \tilde{U} es un abierto de M alrededor de $\pi(p)$ contenido en U (pues $\pi(V) \subset U$).

$$\text{Además} \quad x(\tilde{U}) = x(\pi(\tilde{V})) = x(\pi(y^{-1}(V_\epsilon))) =$$

$$\begin{aligned}
 &= (x \circ \pi \circ y^{-1}) (V_\varepsilon) = \prod_{j=1}^m (y^j(p) - \varepsilon, y^j(p) + \varepsilon) = \\
 &= \prod_{j=1}^m (b^j - \varepsilon, b^j + \varepsilon)
 \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
 x(\tilde{U}) \times \{(b^{m+1}, \dots, b^{m+n})\} &\subset \prod_{j=1}^m (b^j - \varepsilon, b^j + \varepsilon) \times \{(b^{m+1}, \dots, b^{m+n})\} \subset \\
 &\subset V_\varepsilon
 \end{aligned}$$

y por lo tanto podemos definir

$$s: \tilde{U} \rightarrow P \quad \text{por:}$$

$$s = y^{-1} \circ i \circ x / \tilde{U}$$

Luego s es C^∞ , y además

$$\begin{aligned}
 \pi \circ s &= \pi \circ y^{-1} \circ i \circ x = x^{-1} \circ \underbrace{(x \circ \pi \circ y^{-1}) \circ i \circ x}_{= \text{id}(\text{por } (*))} = \text{id}
 \end{aligned}$$

de donde $s \in \Gamma(\tilde{U}, P)$, con \tilde{U} un entorno abierto de $\pi(p)$ en M , y

$$\begin{aligned}
 s(\pi(p)) &= y^{-1} \circ i \circ x \circ \pi(p) = y^{-1} \circ i \circ (x \circ \pi \circ y^{-1}) \circ y(p) = \\
 &= y^{-1} \circ i \circ (x \circ \pi \circ y^{-1}) (b^1, \dots, b^{m+n}) = \\
 &= y^{-1} \circ i(b^1, \dots, b^m) = p
 \end{aligned}$$

Sea entonces $j^\circ(s)(\pi(p)) \in P^\circ$

$$\text{Claramente } f(j^\circ(s)(\pi(p))) = s(\pi(p)) = p$$

de donde f es suryectiva ./..

Luego de (1) y (2) f es biyectiva .///.

6.13. Observaciones

- 1.- A P° le damos la única estructura diferenciable con la cual f resulta un difeomorfismo. Identificaremos entonces los elementos de P° con los de P y, por lo tanto, P° con P .
- 2.- La demostración de la suryectividad de f nos brinda varias conclusiones de importancia. La primera es que dado $p \in P$ existe una sección local C^∞ s de π definida en algún entorno de $\pi(p)$ tal que $s(\pi(p)) = p$. La segunda es que $P^k(x) \neq \emptyset$ $\forall x \in M$ pues por ser π suryectiva vale la conclusión anterior para $x \in M$ y cualquier punto de $\pi^{-1}(x)$.

6.14. Proposición

Las aplicaciones π , π^k y π_ℓ^k definidas en 6.1, 6.7 y 6.11 respectivamente cumplen las siguientes relaciones:

$$a) \pi^\circ = \pi$$

$$b) \pi_k^k = \text{id}_{p_k} \quad \forall k \in N_0$$

$$c) \pi_\ell^k \circ \pi_\ell^k = \pi^k \quad \forall k, \ell \in N_0 / \ell \leq k$$

$$d) \pi_h^\ell \circ \pi_\ell^k = \pi_h^k \quad \forall \ell, h, k \in N_0 / h \leq \ell \leq k$$

$$e) \pi \circ \pi_0^k = \pi^k \quad \forall k \in N_0$$

Dem.:

Para a) y e) debe tenerse en cuenta la observación 6.13-2 y por lo tanto a) y e) significan en realidad $\pi^\circ = \pi \circ f$ y $\pi \circ f \circ \pi_0^k = \pi^k$ respectivamente

La demostración se sigue teniendo en cuenta 6.1, 6.7, 6.11 y 6.12. ///.

6.15. Definición

Una carta de coordenadas adaptada para P es una terna (U, φ_0, φ) , donde U es un abierto de P y $\varphi_0: \pi(U) \rightarrow \mathbb{R}^m$ y $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ son difeomorfismos que conmutan el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \\ \pi \downarrow & & \downarrow p_1 \\ \pi(U) & \xrightarrow{\varphi_0} & \mathbb{R}^m \end{array} \quad (p_1 \circ \varphi = \varphi_0 \circ \pi)$$

donde p_1 es la proyección sobre el primer factor.

6.16. Observaciones

1. Por 6.2 $\pi(U)$ es un abierto de M .
2. $\varphi_0(\pi(U)) = \mathbb{R}^m$ y $\varphi(U) = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, pues son difeomorfismos.
3. $(\varphi_0, \pi(U))$ y (φ, U) son cartas locales de M y P respectivamente tales que $(\pi(U) \subset \pi(U))$:

$$\varphi_0 \circ \pi \circ \varphi^{-1}(a^1, \dots, a^{m+n}) = (a^1, \dots, a^m), \quad \forall (a^1, \dots, a^{m+n}) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$$

O sea, son cartas que dan la forma local normal para π con la propiedad de cubrir los \mathbb{R}^k respectivos

6.17. Proposición

Si $p \in P$ existe entonces una carta adaptada para $P, (U, \varphi_0, \varphi)$, alrededor de p ($p \in U$).

Dem.:

Por la forma local normal existen cartas (x, W) de M alrededor de $\pi(p)$ e (y, V) de P alrededor de p con $\pi(V) \subset W$ tales que:

$$(*) \quad x \circ \pi \circ y^{-1}(a^1, \dots, a^{m+n}) = (a^1, \dots, a^m), \quad \forall (a^1, \dots, a^{m+n}) \in y(V)$$

Por ser $y(V)$ abierto existe $\varepsilon > 0$ y V_ε entorno abierto de $y(p)$ dado por $V_\varepsilon = \prod_{i=1}^{m+n} (y^i(p) - \varepsilon, y^i(p) + \varepsilon) \subset y(V)$.

Sea $U = y^{-1}(V_\varepsilon)$, luego U es entorno abierto de p en P con $U \subset V$.

Sea $\tilde{W} = \pi(U) \subset W$ (pues $U \subset V$), luego \tilde{W} es entorno abierto de $\pi(p)$ en M .

Sean $\tilde{x} = x|_{\tilde{W}}$ e $\tilde{y} = y|_U$, luego (\tilde{x}, \tilde{W}) e (\tilde{y}, U) son cartas de M alrededor de $\pi(p)$ y de P alrededor de p respectivamente tales que $\pi(U) \subset \tilde{W}$, para las cuales sigue valiendo (*).

Si notamos $U_\varepsilon = \prod_{i=1}^m (y^i(p) - \varepsilon, y^i(p) + \varepsilon)$ resulta por (*) que $\tilde{x}(\tilde{W}) = U_\varepsilon$.

Sean entonces:

$$f: U_\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}^m \text{ dada por}$$

$$f(z^1, \dots, z^m) = \left(\frac{z^1 - y^1(p)}{\varepsilon - |z^1 - y^1(p)|}, \dots, \frac{z^m - y^m(p)}{\varepsilon - |z^m - y^m(p)|} \right)$$

y

$$g: V_\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \text{ dada por}$$

$$g(z^1, \dots, z^{m+n}) = \left(\frac{z^1 - y^1(p)}{\varepsilon - |z^1 - y^1(p)|}, \dots, \frac{z^{m+n} - y^{m+n}(p)}{\varepsilon - |z^{m+n} - y^{m+n}(p)|} \right)$$

Luego f y g resultan difeomorfismos (por ejemplo:

$f^{-1}: \mathbb{R}^m \rightarrow U_\varepsilon$ viene dada por $f^{-1}(a^1, \dots, a^m) =$

$$= \left(\frac{\varepsilon a^1}{1 + |a^1|} + y^1(p), \dots, \frac{\varepsilon a^m}{1 + |a^m|} + y^m(p) \right)$$

Además si $p_1: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ es la proyección sobre el primer factor, resulta:

$$f \circ p_1 /_{V_\varepsilon} = p_1 \circ g \quad (**)$$

Sea entonces:

$$\varphi_O = f \circ \tilde{x} : \tilde{W} = \pi(U) \rightarrow \mathbb{R}^m$$

y

$$\varphi = g \circ \tilde{y} : U \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$$

Claramente φ_O y φ resultan difeomorfismos y por lo tanto $(\varphi_O, \pi(U))$ y (φ, U) son cartas de M alrededor de $\pi(p)$ y de P alrededor de p respectivamente tales que

$$\varphi_O(\pi(U)) = \mathbb{R}^m \quad \text{y} \quad \varphi(U) = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$$

Se afirma entonces que (U, φ_O, φ) es una carta adaptada para P alrededor de p .

En efecto, por 6.15 bastará con ver la conmutatividad del diagrama, pero:

$$\begin{aligned} \varphi_O \circ \pi \circ \varphi^{-1} &= f \circ \underbrace{\tilde{x} \circ \pi \circ \tilde{y}^{-1}}_{= p_1 \quad (*)} \circ g^{-1} = f \circ p_1 \circ g^{-1} = \\ &= p_1 \circ g \circ g^{-1} = p_1 \end{aligned} \quad (**)$$

o sea: $\varphi_O \circ \pi = p_1 \circ \varphi \quad . /// .$

6.18. Observaciones

1.- Si V es un abierto de P , existe entonces U abierto de P tal que: i) $U \subset V$

ii) U es dominio de una carta adaptada para $P, (U, \varphi_O, \varphi)$.

Por lo tanto se concluye que las cartas adaptadas para P dan una base de la topología de P . (En efecto basta observar que las cartas que dan la forma local normal para π son base de la topología de P y que dadas esas cartas una carta adaptada para P se consigue achicando la carta correspondiente a P (Ver 6.17)).

2.- Si (U, φ_O, φ) es una carta adaptada para P notaremos:

$$\varphi_O = (\varphi_O^1, \dots, \varphi_O^m)$$

y

$$\varphi = (\varphi^1, \dots, \varphi^m, \varphi^{1'}, \dots, \varphi^{n'})$$

Con esta notación en mente resulta de 6.15 que:

$$\varphi_O^\alpha (\pi(p)) = \varphi^\alpha(p), \quad \forall 1 \leq \alpha \leq m, \quad \forall p \in U$$

Indicaremos:

$$\varphi^\alpha = t^\alpha, \quad \forall 1 \leq \alpha \leq m$$

Luego será:

$$t^\alpha = \varphi^\alpha = \varphi_O^\alpha \circ \pi, \quad \forall 1 \leq \alpha \leq m$$

y por lo tanto:

$$\varphi_O \circ \pi = (t^1, \dots, t^m)$$

y

$$\varphi = (t^1, \dots, t^m, \varphi^{1'}, \dots, \varphi^{n'})$$

o más brevemente:

$$\varphi_O \circ \pi = t^\alpha$$

$$y \quad \varphi = (t^\alpha, \varphi^i)$$

Como estamos en el contexto de una carta adaptada podemos identificar, si no existe peligro de confusión, las coordenadas de φ_0 con las t^α , o sea indicaremos simplemente:

$$\varphi_0 = t^\alpha \quad (\text{en vez de } \varphi_0 \circ \pi = t^\alpha)$$

3.- Sea (U, φ_0, φ) una carta adaptada para P .

Si $s \in \Gamma(W \subset \pi(U), U)$ resulta:

$$t^\beta \circ s = \varphi_0^\beta, \quad \forall 1 \leq \beta \leq m \text{ en } W$$

$$y \quad \frac{\partial |\alpha|}{\partial \varphi_0^\alpha} \beta \varphi_0^\beta \circ s \Big|_x = \delta_{|\alpha|}^1 \cdot \delta_{\alpha_\beta}^1, \quad \forall 1 \leq \beta \leq m, \forall x \in W, \\ \forall \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$$

En efecto:

$$t^\beta \circ s = \varphi_0^\beta \circ \underbrace{\pi \circ s}_{= \text{id}} = \varphi_0^\beta \quad 6.1$$

y por lo tanto:

$$\frac{\partial |\alpha|}{\partial \varphi_0^\alpha} \beta \varphi_0^\beta \circ s \Big|_x = \frac{\partial |\alpha|}{\partial (\varphi_0^1)^{\alpha_1} \dots \partial (\varphi_0^m)^{\alpha_m}} \varphi_0^\beta \Big|_x = \delta_{|\alpha|}^1 \cdot \delta_{\alpha_\beta}^1$$

Se concluye entonces que:

Dadas $s_1 \in \Gamma(U_1, P)$, $s_2 \in \Gamma(U_2, P)$ y $x_0 \in U_1 \cap U_2$ resulta que

$s_1 \sim_{k, x_0} s_2$ si y sólo si existe (U, φ_0, φ) carta adaptada para P

alrededor de $s_1(x_0)$ tal que:

$$a) \varphi^i \circ s_1(x_0) = \varphi^i \circ s_2(x_0), \quad \forall 1 \leq i \leq n$$

$$b) \quad \left. \frac{\partial |\alpha| \varphi_{i_0}^1 s_1}{\partial \varphi_{i_0}^\alpha} \right|_{x_0} = \left. \frac{\partial |\alpha| \varphi_{i_0}^1 s_2}{\partial \varphi_{i_0}^\alpha} \right|_{x_0}$$

$$\forall 1 \leq i \leq n, \forall \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) / |\alpha| \leq k$$

En otras palabras; para ver si dos secciones son equivalentes bastará verificar la igualdad de sus derivadas hasta el orden k de las últimas n coordenadas en alguna carta adaptada (las primeras m coordenadas siempre son iguales).

6.19. Comentario

Sea $k \geq 1$. Queremos darle a P^k una estructura de variedad diferenciable.

Sea (U, φ_U, φ) una carta adaptada para P .

Sea $V_U = (\pi_U^k)^{-1}(U) \subset P^k$

(en realidad deberíamos poner $V_U = (\pi_U^k)^{-1}(f^{-1}(U))$, donde f es la aplicación definida en 6.12 pero tenemos en cuenta 6.13).

Se afirma lo siguiente:

Dado $y \in P^k$;

$y \in V_U$ si y sólo si existe W entorno abierto de $\pi^k(y)$ en M y $s \in \Gamma(W, U)$ tal que $y = j^k(s)(\pi^k(y))$.

En efecto:

\Rightarrow) Como $y \in P^k \xRightarrow{6.7} y \in P^k(\pi^k(y)) \xRightarrow{6.10} \exists V$ entorno

abierto de $\pi^k(y)$ en M y $\tilde{s} \in \Gamma(V, P)$ tal que $y = j^k(\tilde{s})(\pi^k(y))$.

Por otra parte como $y \in V_U \Rightarrow \pi_U^k(y) \in U$.

$$\begin{aligned} \text{Pero } \pi_O^k(y) &= \pi_O^k(j^k(\tilde{s})(\pi^k(y))) = j^o(\tilde{s})(\pi^k(y)) = \\ &= \tilde{s}(\pi^k(y)) \end{aligned}$$

Luego $\tilde{s}(\pi^k(y)) \in U$

Sea $W = V \cap \tilde{s}^{-1}(U)$

Luego W es un entorno abierto de $\pi^k(y)$ en M .

Además:

$$\tilde{s}(W) \subset U \quad (\text{pues } \tilde{s}(V \cap \tilde{s}^{-1}(U)) \subset \tilde{s}(\tilde{s}^{-1}(U)))$$

Sea $s = \tilde{s}|_W$

Luego $s \in \Gamma(W, U)$ y claramente

$$y = j^k(\tilde{s})(\pi^k(y)) = j^k(s)(\pi^k(y)) \quad . / .$$

Se observa además que como $s \in \Gamma(W, U) \Rightarrow$

$$\Rightarrow W \subset \pi(U) \quad (\text{pues } s(W) \subset U \quad \text{y} \quad \pi \circ s = \text{id})$$

\Leftarrow) Recíprocamente

$$\pi_O^k(y) = \pi_O^k(j^k(s)(\pi^k(y))) = j^o(s)(\pi^k(y)) = s(\pi^k(y)) \in U.$$

$$\text{Luego } y \in (\pi_O^k)^{-1}(U) = V_U \quad . /// .$$

$$\text{Sea } h = m + n + n \sum_{i=1}^k c'_{m,i}$$

donde con $c'_{m,i}$ indicamos las combinaciones con repetición de m elementos tomados de a_i .

Queremos definir

$$\phi^k: V_U \rightarrow R^h$$

Sea $A_U = \{s \in \Gamma(W, U) : W \text{ es abierto de } M\}.$

Por lo observado antes resulta:

$$V_U = \{j^k(s)(x) : s \in A_U \wedge x \in \text{Dom } s\}$$

Sea $y \in V_U \Rightarrow$ existe W entorno abierto de $\pi^k(y)$ en M y $s \in \Gamma(W, U)$ tal que $y = j^k(s)(\pi^k(y))$. Se definen:

$$s^i = \varphi^i \circ s \circ \varphi_0^{-1} : \varphi_0(W) \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}, \quad \forall 1 \leq i \leq n$$

$$s_{\alpha}^i = D_{\alpha}(s^i) : \varphi_0(W) \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}, \quad \forall 1 \leq i \leq n, \forall 1 \leq \alpha \leq m$$

y en general:

$$\begin{aligned} s_{\alpha_1 \dots \alpha_t}^i &= D_{\alpha_t}(D_{\alpha_{t-1}} \dots (D_{\alpha_1} s^i) \dots) = \\ &= D_{\alpha_1 \dots \alpha_t}(s^i) : \varphi_0(W) \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}, \end{aligned}$$

$$\forall 1 \leq i \leq n, \quad \forall 1 \leq \alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_t \leq m, \quad \forall 1 \leq t \leq k$$

Si $1 \leq \alpha_1, \dots, \alpha_t \leq m$ es un conjunto arbitrario de índices asumiremos que:

$$s_{\alpha_1 \dots \alpha_t}^i = s_{\{\alpha_1, \dots, \alpha_t\}}^i,$$

donde $\{\alpha_1, \dots, \alpha_t\}$ significará tomar los índices $\alpha_1, \dots, \alpha_t$ en forma creciente.

Definimos entonces:

$$\phi^k(y) = (\varphi_0(x), s^1(\varphi_0(x)), s_{\alpha}^1(\varphi_0(x)), \dots, s_{\alpha_1 \dots \alpha_k}^1(\varphi_0(x))),$$

donde $x = \pi^k(y)$.

Por 6.18- 2 y 3 $\varphi_0^{\beta}(x) = \beta_{\varphi} \circ s(x)$ y como $s^1(\varphi_0(x)) = \varphi^1(s(x))$, entonces las primeras $m+n$ coordenadas de ϕ^k resultan ser $\varphi(s(x))$, por lo tanto:

$$\phi^k(y) = \phi^k(j^k(s)(x)) = (\varphi(s(x)), s_{\alpha}^1(\varphi_0(x)), \dots, s_{\alpha_1 \dots \alpha_k}^1(\varphi_0(x)))$$

Por otra parte, por definición:

$$s_{\alpha_1 \dots \alpha_t}^i (\varphi_O(x)) = \frac{\partial^t (\varphi^i \circ s)}{\partial \varphi_O^{\alpha_1} \dots \partial \varphi_O^{\alpha_t}} \Big|_x$$

con lo cual podemos escribir:

$$\phi^k(y) = \phi^k(j^k(s)(x)) = (\varphi(s(x)), \frac{\partial \varphi^i \circ s}{\partial \varphi_O^{\alpha}} \Big|_x, \dots, \frac{\partial^k \varphi^i \circ s}{\partial \varphi_O^{\alpha_1} \dots \partial \varphi_O^{\alpha_k}} \Big|_x)$$

y por lo tanto por 6.18-3 la definición de ϕ^k no depende de la sección s elegida. Luego ϕ^k está bien definida.

Veamos entonces que es posible darle una estructura de variedad diferenciable a P^k de tal forma que la familia $\{(\phi^k, V_U)\}$ correspondiente a cartas adaptadas para P sea un atlas C^∞ .

6.20. Proposición

P^k tiene una estructura de variedad diferenciable, con la cual $\{(\phi^k, V_U)\}$ es un atlas C^∞ , $\forall k \in N_0$.

Dem.:

Sea $k \geq 1$

1.- $P^k = \bigcup V_U$

En efecto:

$$\bigcup V_U = \bigcup (\pi_O^k)^{-1}(U) = (\pi_O^k)^{-1}(\bigcup U) = (\pi_O^k)^{-1}(P) = P^k$$

6.18-1

2.- $\phi^k: V_U \rightarrow R^h$ es biyectiva

En efecto:

Calculemos $(\phi^k)^{-1}: R^h \rightarrow V_U$

Sea $(\underbrace{a^1, \dots, a^m}_a, \underbrace{b^1, \dots, b^n}_b, b_\alpha^i, \dots, b_{\alpha_1 \dots \alpha_k}^i) \in R^h$

Sea $f: R^m \rightarrow R^{m+n} \quad C^\infty$

$$f = (f^1, \dots, f^m, f^{m+1}, \dots, f^{m+n}) = (f^\alpha, f^i)$$

tal que:

- i) $f^\alpha = \text{proyección a la } \alpha\text{-ésima coordenada}, \forall 1 \leq \alpha \leq m$
- ii) $f^i(a) = b^{i-m}, \forall m+1 \leq i \leq m+n$
- iii) $D_{\alpha_1 \dots \alpha_r} (f^i)(a) = b_{\alpha_1 \dots \alpha_r}^{i-m}, \forall m+1 \leq i \leq m+n, \forall 1 \leq r \leq k$

Es fácil ver que una tal $f \in C^\infty$ siempre existe.

Recordemos que tenemos una carta adaptada (U, φ_O, φ) para P .

Sea entonces:

$$s = \varphi^{-1} \circ f \circ \varphi_O : \pi(U) \rightarrow U$$

Luego s es C^∞ y además:

$$\pi \circ s = \pi \circ \varphi^{-1} \circ f \circ \varphi_O \stackrel{6.15}{=} \varphi_O^{-1} \circ \underbrace{p_1 \circ f \circ \varphi_O}_{=id \text{ i)}} = id$$

Luego $s \in \Gamma(\pi(U), U)$.

Definimos entonces:

$$(\phi^k)^{-1}(a, b, b_\alpha^i, \dots, b_{\alpha_1 \dots \alpha_k}^i) = j^k(s)(\varphi_O^{-1}(a))$$

(a) - $(\phi^k)^{-1}$ está bien definida:

En efecto:

Si $\tilde{f}: R^m \rightarrow R^{m+n}$ es otra función C^∞ verificando i), ii), e iii) y

$\tilde{s} = \varphi^{-1} \circ \tilde{f} \circ \varphi_O$, entonces:

$$s(\varphi_O^{-1}(a)) = \varphi^{-1}(f(a)) = \varphi^{-1}(b) = \varphi^{-1}(\tilde{f}(a)) = \tilde{s}(\varphi_O^{-1}(a))$$

y

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^r \varphi^i \circ s}{\partial \varphi_0^{\alpha_1} \dots \partial \varphi_0^{\alpha_r}} \Big|_{\varphi_0^{-1}(a)} &= D_{\alpha_1 \dots \alpha_r} (\varphi^i \circ s \circ \varphi_0^{-1}) (a) = \\
&= D_{\alpha_1 \dots \alpha_r} (\varphi^i \circ \varphi^{-1} \circ f \circ \varphi_0 \circ \varphi_0^{-1}) (a) = \\
&= D_{\alpha_1 \dots \alpha_r} (f^{m+i}) (a) = \\
&= D_{\alpha_1 \dots \alpha_r} (\tilde{f}^{m+i}) (a) = \frac{\partial^r \varphi^i \circ \tilde{s}}{\partial \varphi_0^{\alpha_1} \dots \partial \varphi_0^{\alpha_r}} \Big|_{\varphi_0^{-1}(a)}
\end{aligned}$$

6.18-2

Luego, por 6.18-3, $s \circ \widetilde{k, \varphi_0^{-1}(a)} \tilde{s} \Rightarrow j^k(s)(\varphi_0^{-1}(a)) = j^k(\tilde{s})(\varphi_0^{-1}(a))$.//.

$$(b) - \phi^k \circ (\phi^k)^{-1} = \text{id}_{R^h} \quad y \quad (\phi^k)^{-1} \circ \phi^k = \text{id}_{V_U} :$$

Esto es trivial a partir de las definiciones de ϕ^k y $(\phi^k)^{-1}$.//.
Luego ϕ^k es biyectiva -//-

3.- $\phi^k(V_U \cap V_U^\sim)$ es un abierto de R^h

En efecto:

$$\text{Veamos que } \phi^k(V_U \cap V_U^\sim) = \varphi(U \cap \tilde{U}) \times R^{h-m-n}$$

$$(c) \text{ Sea } (a, b, b_\alpha^i, \dots, b_{\alpha_1 \dots \alpha_k}^i) \in \phi^k(V_U \cap V_U^\sim) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a, b, b_\alpha^i, \dots, b_{\alpha_1 \dots \alpha_k}^i) \in \phi^k((\pi_O^k)^{-1}(U \cap \tilde{U})) \Rightarrow$$

6.19

\Rightarrow existe W entorno abierto en M y $s \in \Gamma(W, U \cap \tilde{U})$ tal que

$$\phi^k(j^k(s)(x)) = (a, b, b_\alpha^i, \dots, b_{\alpha_1 \dots \alpha_k}^i), \text{ para alg\'un } x \in W \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow (a, b) = \varphi(s(x)) \in \varphi(U \cap \tilde{U}), \text{ pues } s(x) \in U \cap \tilde{U}. \Rightarrow \\ 6.19 \quad &\Rightarrow (a, b, b_{\alpha}^i, \dots, b_{\alpha_1 \dots \alpha_k}^i) \in \varphi(U \cap \tilde{U}) \times \mathbb{R}^{h-m-n} \quad -/- \end{aligned}$$

$$\supset) \text{ Sea } (a, b, b_{\alpha}^i, \dots, b_{\alpha_1 \dots \alpha_k}^i) \in \varphi(U \cap \tilde{U}) \times \mathbb{R}^{h-m-n} \subset \mathbb{R}^h \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a, b) \in \varphi(U \cap \tilde{U}) \Rightarrow \exists p \in U \cap \tilde{U} \text{ tal que } (a, b) = \varphi(p) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = p_1(\varphi(p)) = \varphi_0(\pi(p)) \Rightarrow a \in \varphi_0(\pi(U \cap \tilde{U}))$$

6.15

Sea $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m+n} \subset \mathbb{C}^{\infty}$ la aplicación definida en 2.

$$\text{Sea } W = \varphi_0(\pi(U \cap \tilde{U})) \cap f^{-1}(\varphi(U \cap \tilde{U}))$$

Luego W es un abierto de \mathbb{R}^m , $f(W) \subset \varphi(U \cap \tilde{U})$ y $a \in W$. Luego $\varphi_0^{-1}(W)$ es un abierto de M .

Sea $s = \varphi^{-1} \circ f \circ \varphi_0$ la sección dada en 2.- y sea $\tilde{s} = s / \varphi_0^{-1}(W)$.

Claramente $\tilde{s} \in \Gamma(\varphi_0^{-1}(W), U \cap \tilde{U})$, pues $f(W) \subset \varphi(U \cap \tilde{U})$. Como $\varphi_0^{-1}(a) \in \varphi_0^{-1}(W)$, pues $a \in W$, resulta:

$$j^k(\tilde{s})(\varphi_0^{-1}(a)) = j^k(s)(\varphi_0^{-1}(a)).$$

Luego:

$$\begin{aligned} &(\Phi^k)^{-1}(a, b, b_{\alpha}^i, \dots, b_{\alpha_1 \dots \alpha_k}^i) = j^k(\tilde{s})(\varphi_0^{-1}(a)) \Rightarrow \\ &\Rightarrow (a, b, b_{\alpha}^i, \dots, b_{\alpha_1 \dots \alpha_k}^i) = \Phi^k(j^k(\tilde{s})(\varphi_0^{-1}(a))) \end{aligned}$$

Pero como:

$$\pi_0^k(j^k(\tilde{s})(\varphi_0^{-1}(a))) = j^0(\tilde{s})(\varphi_0^{-1}(a)) = \tilde{s}(\varphi_0^{-1}(a)) =$$

6.12

$= \varphi^{-1}(f(a)) = \varphi^{-1}(a, b) \in U \cap \tilde{U}$, pues $f(a) = (a, b) \in \varphi(U \cap \tilde{U})$. Resulta entonces que:

$$\begin{aligned} j^k(\tilde{s})(\varphi_0^{-1}(a)) &\in (\pi_0^k)^{-1}(U \cap \tilde{U}) = (\pi_0^k)^{-1}(U) \cap (\pi_0^k)^{-1}(\tilde{U}) = \\ &= V_U \cap V_{\tilde{U}} \end{aligned}$$

Luego $(a, b, b_{\alpha}^i, \dots, b_{\alpha_1 \dots \alpha_k}^i) \in \Phi^k(V_U \cap V_{\tilde{U}})$./.

Como φ es un difeomorfismo, se concluye lo afirmado.//.

4.- $\tilde{\varphi}^k \circ (\varphi^k)^{-1} : \varphi^k(V_U \cap V_U^\sim) \rightarrow \tilde{\varphi}^k(V_U \cap V_U^\sim)$ es C^∞ .

Sea $(a, b, b_\alpha^i, \dots, b_{\alpha_1 \dots \alpha_k}^i) \in \varphi^k(V_U \cap V_U^\sim)$.

Si \tilde{s} es la sección dada en 3- resulta:

$$\begin{aligned} (\tilde{\varphi}^k \circ (\varphi^k)^{-1})(a, b, b_\alpha^i, \dots, b_{\alpha_1 \dots \alpha_k}^i) &= \tilde{\varphi}^k(j^k(\tilde{s})(\varphi_0^{-1}(a))) = \\ &= (\tilde{\varphi}(\tilde{s}(\varphi_0^{-1}(a))), \frac{\partial \tilde{\varphi}^i \circ \tilde{s}}{\partial \tilde{\varphi}_\alpha^i} / \varphi_0^{-1}(a), \dots, \frac{\partial^k \tilde{\varphi}^i \circ \tilde{s}}{\partial \tilde{\varphi}_\alpha^{\alpha_1} \dots \partial \tilde{\varphi}_\alpha^{\alpha_k}} / \varphi_0^{-1}(a)) \end{aligned} \quad 5.19$$

Bastará entonces observar que las funciones "coordenadas" de $\tilde{\varphi}^k \circ (\varphi^k)^{-1}$ son C^∞ como función de las variables $a, b, b_\alpha^i, \dots, b_{\alpha_1 \dots \alpha_k}^i$.

En efecto:

$$\tilde{\varphi}(\tilde{s}(\varphi_0^{-1}(a))) = (\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1})(f(a)) = (\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1})(a, b).$$

Por otra parte:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\varphi}^i \circ \tilde{s}}{\partial \tilde{\varphi}_\alpha^i} / \varphi_0^{-1}(a) &= \tilde{s}_\alpha^i(\tilde{\varphi}_0(\varphi_0^{-1}(a))) = D_\alpha(\tilde{s}^i) \circ (\tilde{\varphi}_0 \circ \varphi_0^{-1})(a) = \\ &= D_\alpha(\tilde{\varphi}^i \circ \tilde{s} \circ \varphi_0^{-1}) \circ (\tilde{\varphi}_0 \circ \varphi_0^{-1})(a) = \\ &= D_\alpha(\tilde{\varphi}^i \circ \varphi^{-1} \circ f \circ \varphi_0 \circ \varphi_0^{-1}) \circ (\tilde{\varphi}_0 \circ \varphi_0^{-1})(a) = \\ &= \sum_{j=1}^{m+n} \sum_{\beta=1}^m D_j(\tilde{\varphi}^i \circ \varphi^{-1}) \circ f(a) \cdot D_\beta(f^j)(a) \cdot D_\alpha(\varphi_0^\beta \circ \varphi_0^{-1}) \circ (\tilde{\varphi}_0 \circ \varphi_0^{-1})(a) \end{aligned}$$

$$\text{Pero } f(a) = (a, b) \text{ y } D_\beta(f^j)(a) = \begin{cases} \delta_\beta^j & \text{si } 1 \leq j \leq m \\ b_\beta^{j-m} & \text{si } m+1 \leq j \leq m+n \end{cases}$$

Luego:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\varphi}^i \circ \tilde{s}}{\partial \tilde{\varphi}_0^\alpha} / \varphi_0^{-1}(a) &= \sum_{\beta=1}^m D_\beta (\tilde{\varphi}^i \circ \varphi^{-1})(a, b) \cdot D_\alpha (\varphi_0^\beta \circ \tilde{\varphi}_0^{-1}) \circ (\tilde{\varphi}_0 \circ \varphi_0^{-1})(a) + \\ &+ \sum_{\beta=1}^m \sum_{j=m+1}^{m+n} D_j (\tilde{\varphi}^i \circ \varphi^{-1})(a, b) \cdot b_\beta^{j-m} \cdot \\ &\cdot D_\alpha (\varphi_0^\beta \circ \tilde{\varphi}_0^{-1}) \circ (\tilde{\varphi}_0 \circ \varphi_0^{-1})(a) \end{aligned}$$

En general será:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^r \tilde{\varphi}^i \circ \tilde{s}}{\partial \tilde{\varphi}_0^{\alpha_1} \dots \partial \tilde{\varphi}_0^{\alpha_r}} / \varphi_0^{-1}(a) &= (D_{\alpha_r} \dots D_{\alpha_1} (\tilde{\varphi}^i \circ \varphi^{-1} \circ f \circ \varphi_0 \circ \tilde{\varphi}_0^{-1})) \circ (\tilde{\varphi}_0 \circ \varphi_0^{-1})(a) \\ &= D_{\alpha_r} \dots D_{\alpha_2} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{m+n} \sum_{\beta=1}^m D_j (\tilde{\varphi}^i \circ \varphi^{-1}) \circ f \cdot D_\beta (f^j) \cdot D_\alpha (\varphi_0^\beta \circ \varphi_0^{-1}) \right)}_{(*)} \circ \\ &\circ (\tilde{\varphi}_0 \circ \varphi_0^{-1})(a) \end{aligned}$$

Observemos que al derivar (*) respecto de $\alpha_2, \dots, \alpha_r$ aparecerán términos de la forma:

- i) $D_{i_1} \dots D_{i_\ell} (\tilde{\varphi}^i \circ \varphi^{-1})(f(a))$
- ii) $D_{\beta_1} \dots D_{\beta_\ell} (f^j)(a)$
- iii) $D_{\alpha_1} \dots D_{\alpha_\ell} (\varphi_0^\beta \circ \tilde{\varphi}_0^{-1}) \circ (\tilde{\varphi}_0 \circ \varphi_0^{-1})(a)$

multiplicados y sumados entre sí.

Claramente los del tipo i) y iii) son C^∞ como función de las variables $a, b, b_\alpha^i, \dots, b_{\alpha_1 \dots \alpha_k}^i$. Para los términos del tipo ii) basta observar que para $\ell \geq 2$ (el caso $\ell=1$ ya fue analizado):

$$D_{\beta_1 \dots \beta_\ell} (f^j)(a) = \begin{cases} 0 & \text{si } 1 \leq j \leq m \\ b_{\beta_1 \dots \beta_\ell}^{j-m} & \text{si } m+1 \leq j \leq m+n \end{cases}$$

que es claramente C^∞ . Resulta entonces lo afirmado.//.-

En conclusión, de 1,2,3,y 4, resulta que existe sobre P^k una estructura de variedad diferenciable, única, tal que la familia $\{(\phi^k, V_U)\}$, correspondiente a cartas adaptadas para P , es un atlas C^∞ . Lo que no nos asegura lo anterior es que, con esta estructura, P^k sea una variedad T_2 y N_2 . Veamos esto:

5. P^k es N_2

Por ser P una variedad N_2 y 6.18-1 podemos conseguir una familia numerable $\{(U_i, \varphi_{o_i}, \varphi_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ de cartas adaptadas para P correspondiente a un atlas numerable $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ de P . Por lo tanto (de 1.-) la familia $\{(V_{U_i}, \phi_i^k)\}_{i \in \mathbb{N}}$ es un atlas numerable de P^k . Luego P^k es N_2 .-/-

6. P^k es T_2

Sean $y_1, y_2 \in P^k$ tales que $y_1 \neq y_2$.

a) Sup. $\pi_o^k(y_1) \neq \pi_o^k(y_2)$

Sean $(U_1, \varphi_{o_1}, \varphi_1)$ y $(U_2, \varphi_{o_2}, \varphi_2)$ cartas adaptadas para P tales que $\pi_o^k(y_i) \in U_i$, $i=1,2$ y $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ (esto siempre se puede conseguir pues P es T_2 y 6.18-1).

Luego $V_{U_i} = (\pi_o^k)^{-1}(U_i)$ son entornos abiertos de y_i , $i=1,2$ tales que $V_{U_1} \cap V_{U_2} = \emptyset$ -/-

b) Sup. $\pi_o^k(y_1) = \pi_o^k(y_2)$.

Existe entonces (U, φ_o, φ) carta adaptada para P alrededor de $\pi_o^k(y_1) = \pi_o^k(y_2) \Rightarrow y_1, y_2 \in V_U$

Sean W_1 y W_2 entornos abiertos de $\phi^k(y_1)$ y $\phi^k(y_2)$ en \mathbb{R}^h tales que $W_1 \cap W_2 = \emptyset$ (siempre es posible conseguir esto pues \mathbb{R}^h es T_2 y $\phi^k(y_1) \neq \phi^k(y_2)$ pues ϕ^k es biyectiva). Luego $(\phi^k)^{-1}(W_i)$, $i=1,2$, son entornos abiertos de y_i en V_U ,

luego abiertos en P^k tales que:

$$(\phi^k)^{-1}(W_1) \cap (\phi^k)^{-1}(W_2) = (\phi^k)^{-1}(W_1 \cap W_2) = \emptyset \quad -/-$$

Luego de a) y b) P^k es T_2 -//-

Basta observar por último que si $k=0$, por 6.13-1, P^0 tiene una estructura diferenciable con la cual $\{(\phi^0, V_U)\}$ es un atlas C^∞ . Observemos que en este caso es $\phi^0 \simeq \varphi$ y $V_U \simeq U$ -///-

6.21. Notación

Sea (ϕ^k, V_U) una carta de P^k correspondiente a una carta adaptada para P , (U, φ_0, φ) .

Queremos darle nombres a las funciones coordenadas de ϕ^k . Teniendo en cuenta 6.18-2 notaremos:

$$\varphi_0 = (t^1, \dots, t^m)$$

$$\text{o sea: } \varphi_0^\alpha = t^\alpha, \quad \forall 1 \leq \alpha \leq m$$

$$\varphi = (t^1, \dots, t^m, x^1, \dots, x^n)$$

$$\text{o sea: } \begin{cases} \varphi^\alpha = t^\alpha & , \quad \forall 1 \leq \alpha \leq m \\ \varphi^i = x^i & , \quad \forall 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

Recordemos que las t^α de φ_0 no son las mismas que las de φ , si por un momento indicamos $\tilde{t}^\alpha = \varphi_0^\alpha$ se cumple la relación $t^\alpha = \tilde{t}^\alpha \circ \pi$.

Por analogía notamos:

$$\phi^k = (t^\alpha, x^i, x_{\alpha_1}^i, \dots, x_{\alpha_1 \dots \alpha_k}^i)$$

donde:

$$t^\alpha(j^k(s)(x)) = \varphi_0^\alpha(x) = \tilde{t}^\alpha(x) = \tilde{t}^\alpha(s(x)), \quad \forall 1 \leq \alpha \leq m$$

$$x^i(j^k(s)(x)) = s^i(\varphi_0(x)) = x^i(s(x)), \quad \forall 1 \leq i \leq n$$

$$x_{\alpha}^i(j^k(s)(x)) = s_{\alpha}^i(\varphi_0(x)) = s_{\alpha}^i(t^1(x), \dots, t^m(x)), \quad \forall 1 \leq i \leq n, \\ \forall 1 \leq \alpha \leq m$$

y en general

$$x_{\alpha_1 \dots \alpha_r}^i(j^k(s)(x)) = s_{\alpha_1 \dots \alpha_r}^i(\varphi_0(x)) = s_{\alpha_1 \dots \alpha_r}^i(t^1(x), \dots, t^m(x)), \\ \forall 1 \leq i \leq n, \quad \forall 1 \leq \alpha_1, \dots, \alpha_r \leq m$$

Recalcamos que aunque estamos usando la misma notación para ciertas funciones coordenadas de φ_0, φ y ϕ^k , éstas no son iguales (pues claramente parten de distintos conjuntos), pero indicando los puntos correctamente (los únicos posibles) entonces esas funciones (t^{α} y x^i) toman los mismos valores.

6.22. Observaciones

1.- Si $s \in \Gamma(W, P)$, entonces $j^k(s) \in \Gamma(W, P^k)$. En efecto:

Por 6.10-1 sabemos que $j^k(s)$ es una sección de π^k . Bastará entonces ver que $j^k(s): W \rightarrow P^k$ es C^{∞} .

Sea $x \in W \Rightarrow s(x) \in P$.

Sea (U, φ_0, φ) una carta adaptada para P alrededor de $s(x)$. Sea:

$$\tilde{W} = s^{-1}(U)$$

Luego \tilde{W} es un entorno abierto de x en M tal que $\tilde{W} \subset W$ y $s(\tilde{W}) \subset U$.

Luego, $\forall z \in \tilde{W}$ resulta:

$$\pi_0^k(j^k(s)(z)) = j^0(s)(z) = s(z) \in U$$

y por lo tanto:

$$j^k(s)(\tilde{W}) \subset V_U$$

Luego las cartas (φ_0, \tilde{W}) de M alrededor de x y (ϕ^k, V_U) de P^k alrededor de $j^k(s)(x)$ son tales que $j^k(s)(\tilde{W}) \subset V_U$, y además:

$$\begin{aligned}
& \phi^k \circ j^k(s) \circ \varphi_0^{-1}(t^1, \dots, t^m) = \\
& = (t^1, \dots, t^m, s^i(t^1, \dots, t^m), s_{\alpha}^i(t^1, \dots, t^m), \dots, s_{\alpha_1 \dots \alpha_k}^i(t^1, \dots, t^m)) \\
& \text{es claramente } C^{\infty}. -// -
\end{aligned}$$

2.- Si $s_i \in \Gamma(W_i, P)$, $i=1,2$, son tales que $s_1 \sim_{k,x} s_2 \forall x \in W_1 \cap W_2$,
entonces $j^k(s_1) = j^k(s_2)$. La demostración es trivial-// -

7. APENDICE II

El propósito de este apéndice es analizar en detalle ciertos aspectos de la teoría de los k -jets (vista en el Apéndice I) en el caso particular que nuestro contexto sea el detallado en 2.1 de la Sección 2.

Sin pérdida de generalidad y para no aumentar la ya complicada notación supondremos que en 2.1 $c=1$ y notaremos entonces $r_1=r$ y $s_1=s$. En este caso (2.1) y (2.2) se convierten en:

$$P = \bigcup_{p \in M} T_S^r(M_p) = T_S^r(M) \quad , \quad n=m^{(r+s)} \quad (7.1)$$

Como en 2.1 consideramos $p \in M$ y (x, U) una carta local de M alrededor de p tal que $x(U) = \mathbb{R}^m$. Sea (\tilde{x}, U) otra carta local de M con $\tilde{x}(U) = \mathbb{R}^m$.

Nuestra intención es describir la aplicación $\psi_p^k(\tilde{x})$. Para ello es necesario conocer el comportamiento de la aplicación $\tilde{\phi}^k$ o $(\phi^k)^{-1}$. Recordemos (ver 6.19) que las cartas (ϕ^k, V_U) de P^k se conseguían partiendo de cartas adaptadas (U, φ_U, φ) , para P . En nuestro contexto actual, dado por (7.1), las cartas (x, U) y (\tilde{x}, U) nos determinan dos cartas (ϕ^k, V_U) y $(\tilde{\phi}^k, V_U)$ de P^k a partir de las cartas adaptadas $(\pi^{-1}(U), t_U, x)$ y $(\pi^{-1}(U), \tilde{t}_U, \tilde{x})$ correspondientes. Recordemos también que en 6.20 para definir $(\phi^k)^{-1}$ nos valíamos de una cierta función auxiliar f . Para no confundir dicha función con la definida en el Lema 2.2 aquí la llamaremos θ .

Cada elemento de \mathbb{R}^h es de la forma:

$$(a, b) = (a^1, \dots, a^m, b_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}, b_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r \alpha}, \dots, b_{j_1 \dots j_r}^{i_1 \dots i_r \alpha_1 \dots \alpha_k})$$

Luego para $(a,b) \in \mathbb{R}^h$ definíamos:

$$\theta: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m+n} \quad C^\infty$$

$$\theta = (\theta^1, \dots, \theta^m, \theta^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s}) \text{ tal que:}$$

- i) $\theta^i =$ proyección a la i -ésima coordenada, $\forall 1 \leq i \leq m$
- ii) $\theta^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s}(a) = b^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s}$
- iii) $D_{\alpha_1 \dots \alpha_r}(\theta^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s}) = b^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} \alpha_1 \dots \alpha_r, \forall 1 \leq r \leq k$

Resulta entonces, reemplazando en 6.20-4 todo lo necesario que:

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}^k \circ (\phi^k)^{-1}(a,b) &= ((\tilde{t}_U \circ t_U^{-1})(a,b), \\ (1) \quad D_\alpha((\tilde{t}_U)^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} \circ t_U^{-1} \circ \theta \circ x \circ \tilde{x}^{-1}) \circ (\tilde{x} \circ x^{-1})(a), \dots, \\ D_{\alpha_1 \dots \alpha_k}((\tilde{t}_U)^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} \circ t_U^{-1} \circ \theta \circ x \circ \tilde{x}^{-1}) \circ (\tilde{x} \circ x^{-1})(a)) \end{aligned}$$

Ahora bien, es conocido (y fácil de ver) que:

$$(2) \quad \tilde{t}_U \circ t_U^{-1}(a,b) = ((\tilde{x} \circ x^{-1})(a), b^{h_1 \dots h_r}_{k_1 \dots k_s})$$

$$\begin{aligned} \text{donde, } b^{h_1 \dots h_r}_{k_1 \dots k_s} &= A^{h_1}_{i_1}(x^{-1}(a)) \dots A^{h_r}_{i_r}(x^{-1}(a)) \cdot B^{j_1}_{k_1}(x^{-1}(a)) \dots \\ &\dots B^{j_s}_{k_s}(x^{-1}(a)) b^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} \text{ y donde } A^i_j = \partial \tilde{x}^i / \partial x^j \text{ y } B^i_j = \partial x^i / \partial \tilde{x}^j \end{aligned}$$

Por otra parte por 6.20-4:

$$\begin{aligned} D_\alpha(\tilde{t}_U)^{h_1 \dots h_r}_{k_1 \dots k_s} \circ t_U^{-1} \circ \theta \circ x \circ \tilde{x}^{-1}) \circ (\tilde{x} \circ x^{-1})(a) = \\ (3) \quad = \sum_{i=1}^m D_i((\tilde{t}_U)^{h_1 \dots h_r}_{k_1 \dots k_s} \circ t_U^{-1})(a,b) \cdot D_\alpha(x^i \circ \tilde{x}^{-1}) \circ (\tilde{x} \circ x^{-1})(a) + \\ + \sum_{i=1}^m \sum_J D_J((\tilde{t}_U)^{h_1 \dots h_r}_{k_1 \dots k_s} \circ t_U^{-1})(a,b) \cdot b^J_i D_\alpha(x^i \circ \tilde{x}^{-1}) \circ (\tilde{x} \circ x^{-1})(a). \end{aligned}$$

donde con J indicamos todas las coordenadas posibles $\begin{pmatrix} i_1 \dots i_r \\ j_1 \dots j_s \end{pmatrix}$ de \mathbb{R}^n .

Ahora bien:

$$\begin{aligned} \tilde{(t_U)}_{k_1 \dots k_s}^{h_1 \dots h_r} \circ t_U^{-1}(c, d) &= (A_{i_1}^{h_1} \circ x^{-1})(c) \dots (A_{i_r}^{h_r} \circ x^{-1})(c) (B_{k_1}^{j_1} \circ x^{-1})(c) \dots \\ &\dots (B_{k_s}^{j_s} \circ x^{-1})(c) d_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} \end{aligned}$$

Luego será:

$$\begin{aligned} D_i(\tilde{(t_U)}_{k_1 \dots k_s}^{h_1 \dots h_r} \circ t_U^{-1})(a, b) &= \{[A_{i_1}^{h_1}(x^{-1}(a)) \dots A_{i_r}^{h_r}(x^{-1}(a)) + \dots \\ (4) \quad &\dots + A_{i_1}^{h_1}(x^{-1}(a)) \dots A_{i_r}^{h_r}(x^{-1}(a))] \cdot \\ &\cdot B_{k_1}^{j_1}(x^{-1}(a)) \dots B_{k_s}^{j_s}(x^{-1}(a)) + A_{i_1}^{h_1}(x^{-1}(a)) \dots A_{i_r}^{h_r}(x^{-1}(a)) [B_{k_1}^{j_1}(x^{-1}(a)) \dots \\ &\dots B_{k_s}^{j_s}(x^{-1}(a)) + \dots + B_{k_1}^{j_1}(x^{-1}(a)) \dots B_{k_s}^{j_s}(x^{-1}(a))] A_i^j(x^{-1}(a))\} b_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} \end{aligned}$$

y dado $J = \begin{pmatrix} i_1 \dots i_r \\ j_1 \dots j_s \end{pmatrix}$ será:

$$\begin{aligned} (5) \quad D_J(\tilde{(t_U)}_{k_1 \dots k_s}^{h_1 \dots h_r} \circ t_U^{-1})(a, b) &= A_{i_1}^{h_1}(x^{-1}(a)) \dots A_{i_r}^{h_r}(x^{-1}(a)) B_{k_1}^{j_1}(x^{-1}(a)) \dots \\ &\dots B_{k_s}^{j_s}(x^{-1}(a)). \end{aligned}$$

Además

$$(6) \quad D_\alpha(x^i \circ \tilde{x}^{-1})(\tilde{x} \circ x^{-1})(a) = B_\alpha^i(x^{-1}(a))$$

Por último, reemplazando (4), (5) y (6) en (3) y teniendo en cuenta que $A_j^i B_r^j = \delta_r^i$ resulta que:

$$\begin{aligned}
D_{\alpha} ((\tilde{t}_U)_{k_1 \dots k_s}^{h_1 \dots h_r} \circ t_U^{-1} \circ \theta \circ x \circ \tilde{x}^{-1}) \circ (\tilde{x} \circ x^{-1})(a) = \\
= \{ [A_{i_1 i_1}^{h_1} \dots A_{i_r i_r}^{h_r} + \dots + A_{i_1 i_1}^{h_1} \dots A_{i_r i_r}^{h_r}] B_{\alpha}^{i_1} B_{k_1}^{j_1} \dots B_{k_s}^{j_s} + \\
+ A_{i_1 i_1}^{h_1} \dots A_{i_r i_r}^{h_r} [B_{k_1 \alpha}^{j_1} \dots B_{k_s \alpha}^{j_s} + \dots + B_{k_1 \alpha}^{j_1} \dots B_{k_s \alpha}^{j_s}] \} (x^{-1}(a)) b_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} + \\
+ \{ A_{i_1 i_1}^{h_1} \dots A_{i_r i_r}^{h_r} B_{k_1}^{j_1} \dots B_{k_s}^{j_s} B_{\alpha}^{i_1} \} (x^{-1}(a)) b_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}
\end{aligned}$$

Es claro que si notamos con $\tilde{b}_{k_1 \dots k_s}^{h_1 \dots h_r}$ al primer término de esta igualdad y pensamos a los $b_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}$ como las componentes de un tensor de tipo (r,s) , dicha igualdad resulta ser el cambio de coordenadas del "tensor" de la carta (x,U) a la carta (\tilde{x},U) .

Es claro de aquí que realizando un trabajo similar, aunque mucho más engorroso, con las restantes coordenadas de $\tilde{\phi}^k \circ (\phi^k)^{-1}$ éstas serán elementos de la forma:

$$\tilde{b}_{k_1 \dots k_s}^{h_1 \dots h_r} \alpha_1 \dots \alpha_t$$

donde su expresión vendrá dada considerando $b_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}$ como las componentes de un tensor de tipo (r,s) y calculando formalmente el cambio de coordenadas de la carta (x,U) a la carta (\tilde{x},U) de las derivadas de orden t .

Por lo tanto concluimos que:

$$\begin{aligned}
\tilde{\phi}^k \circ (\phi^k)^{-1}(a,b) = ((\tilde{x} \circ x^{-1})(a), \tilde{b}_{k_1 \dots k_s}^{h_1 \dots h_r}, \tilde{b}_{k_1 \dots k_s}^{h_1 \dots h_r} \beta_1 \dots \beta_k, \dots \\
\dots, \tilde{b}_{k_1 \dots k_s}^{h_1 \dots h_r} \beta_1 \dots \beta_k)
\end{aligned} \tag{7.2}$$

Y entonces:

$$\begin{aligned} \psi_p^k(\tilde{x}) (b_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}, b_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}, \dots, b_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}) &= \\ &= (\tilde{x}(p), \tilde{b}_{k_1 \dots k_s}^{h_1 \dots h_r}, \tilde{b}_{k_1 \dots k_s}^{h_1 \dots h_r}, \dots, \tilde{b}_{k_1 \dots k_s}^{h_1 \dots h_r}) \end{aligned} \quad (7.3)$$

$${}^Y H^k(\mathbb{C}, b) = (\tilde{b}_{k_1 \dots k_s}^{h_1 \dots h_r}, \tilde{b}_{k_1 \dots k_s}^{h_1 \dots h_r}, \dots, \tilde{b}_{k_1 \dots k_s}^{h_1 \dots h_r}) \quad (7.4)$$

Es fácil ver a partir de (7.3) que si (\tilde{x}, U) y $(\tilde{\tilde{x}}, U)$ son dos cartas con $\tilde{x}(U) = \tilde{\tilde{x}}(U) = \mathbb{R}^m$ tales que $\psi_p^k(\tilde{x}) = \psi_p^k(\tilde{\tilde{x}})$ entonces:

$$f(\psi_p^k(\tilde{x})) = f(\psi_p^k(\tilde{\tilde{x}})),$$

donde f es la aplicación definida en el Lema 2.2, por lo tanto f está bien definida. Recíprocamente si (\tilde{x}, U) y $(\tilde{\tilde{x}}, U)$ son dos cartas con $\tilde{x}(U) = \tilde{\tilde{x}}(U) = \mathbb{R}^m$ tales que $\tilde{x}(p) = \tilde{\tilde{x}}(p) = x(p)$ y

$$B_j^i(p) = \left(\frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^j} \right)_p = \left(\frac{\partial x^i}{\partial \tilde{\tilde{x}}^j} \right)_p = \tilde{B}_j^i(p)$$

entonces:

$$\psi_p^k(\tilde{x}) = \psi_p^k(\tilde{\tilde{x}})$$

y por lo tanto la aplicación g definida en el Lema 2.2 ($g=f^{-1}$) también resulta bien definida.

Por último remarcamos que efectivamente el hecho de haber considerado $c=1$ no hace perder generalidad, ya que si $c \neq 1$ habría que repetir el mismo razonamiento anterior considerando $b_{(1)j_1 \dots j_{s_1}}^{i_1 \dots i_{r_1}}, \dots, b_{(c)j_1 \dots j_{s_c}}^{i_1 \dots i_{r_c}}$ como las componentes de c tensores de tipo (r_ℓ, s_ℓ) ($1 \leq \ell \leq c$) y calculando formalmente los cambios de coordenadas de una carta (x, U) a otra (\tilde{x}, U) de dichos tensores y sus derivadas hasta el orden k .

Ichifumi

Richard Buege

REFERENCIAS

1. Aldersley, S.J. - Dimensional Analysis in Relativistic Gravitational theories, Phys.Rev.,D, 15, n°12, 1977.
2. Dobarro, F. - Análisis dimensional de Lagrangianos vecto-tensoriales, Impresiones Previas FCEN, n°51, 1982.
3. Horndeski,G.W. - Gauge invariance and charge conservation, Tensor, N.S., 32, 1978.
4. Horndeski,G.W. - Scalar- **Tensor** field theories, Tensor, N.S., 24, y Lovelock,D. 1972.
5. Kerrighan, B. - Arbitrary tensor concomitants of a bivector and a metric in a space-time manifold, Gen.Rel.Grav., 13, n°1, 1981.
6. Lovelock, D. - The Euler-Lagrange expression and degenerate Lagrange densities, J. Australian Math. Soc., 14, n°4, 1972.
7. Lovelock, D. - The uniqueness of the Einstein-Maxwell field equations, Gen.Rel.Grav., 5, n°4, 1974.
8. Lovelock, D. - Vector-Tensor field theories and the Einstein-Maxwell field equations, Proc.Royal Soc.London A 341,1974 .
9. Noriega,R.J. - Sobre algunas identidades de invariancia y densidades Lagrangianas degeneradas, Rev.Unión Mat. Arg., 27, 1976.
10. Noriega,R.J. - La ecuación de Klein-Gordon y el operador de Euler-Lagrange, Math.Not., Año XXIX, 1981/82.
11. Noriega, R.J. - Tensorial concomitants of a metric and a bivector, Math.Not.,Año XXIX, 1981/82.

12. Noriega,R.J.
y
Schifini,C.G. - Tensorial concomitants of a metric and a
covector, Impresiones Previas FCEN, n°52,
1982.
13. Noriega,R.J.
y
Schifini,C.G. - On scalar concomitance operators, Rev.
Unión Mat.Arg., 30, n°S 3 y 4, 1982/83.
14. Noriega,R.J.
y
Schifini,C.G. - Scalar density concomitants of a metric
and a bivector (por aparecer en Gen.Rel.
Grav., 1984).
15. Rund, H. - Variational problems involving combined
tensor fields, Abh.Math.Sem.Univ.Hamburg,
29, 1966.
16. Rund, H. - The Hamilton-Jacobi theory, its role in
Mathematics and Physics, Krieger,N.York, 1973.
17. Schifini,C.G. - Tensorial concomitance operators (por aparecer).